

## 2022年“思维100”STEM应用能力活动（秋季）

### 六年级参考内容

1. 定义一种整数集合上的新运算：取模运算，用符号“%”表示，读作模。它的意思是取一个数除以另一个数的余数。例如： $25\%7$ ，读作二十五模七，意思是取25除以7的余数，我们知道 $25\div 7=3\cdots 4$ ，因此 $25\%7=4$ 。在定义一个神奇的函数 $f(x)=x\%k$ ，它相当于一个神奇的“中间商”，你给它一个数字，它就会返回给你另一个与之对应数字，这个数字是它对于给定的正整数 $k$ 的模数，并把它作为 $f(x)$ 的值。例如：给定一个整数 $k=7$ ， $f(25)=25\%7=4$ 。则对于正整数 $k=7$ ，计算哈希函数 $f(2019)=$ \_\_\_\_\_。

【答案】3

2. 上一题中，这个“中间商”的记忆力不是特别好，所以需要将一些数字对应的哈希函数值以表格形式记下来，这张表就叫做哈希表。例如当 $k=7$ 时，先画出一个空的哈希表如下图所示。

0	1	2	3	4	5	6

现在需要将45、25、65、22、32、24，依次填入哈希表之。先计算 $f(45)=3$ ，将45填入3下面的空格（也叫做桶）中。再按照这一方法依次填入25、65、22，如下图所示。

0	1	2	3	4	5	6
	22	65	45	25		

当在计算 $f(32)$ 的时候，我们发现 $f(32)=4$ ，而4下面对应的桶已经被占用。我们将这样的桶被占用的情况称作一次冲突。当出现冲突时，我们需要解决冲突，即在表中寻找一个空白的桶，将发生冲突的数字填进去。现在提供一种解决冲突的方法：当 $x$ 对应的 $m$ 号桶被占用时，我们从当前位置开始，向后探测 $i^2(i=1,2,3,\cdots)$ 个位置，直到找到一个空白的桶，然后将其填入。例如， $f(32)=4$ ，我们从4号桶开始向后探测，第一次探测 $1^2$ 个位置，到达5号桶，发现此桶为空，故将32填入5号桶（如果一次探测不到就将 $i$ 加1，继续探测直到找到空的桶），得到：

0	1	2	3	4	5	6
	22	65	45	25	32	

继续计算  $f(24)=3$ ，3号桶被占用，向后探测  $1^2$  个位置，到达4号桶，4号桶仍被占用，将  $i$  的值加1，此时  $i=2$ ，下一步从原位置向后探测  $2^2$  个位置，到达0号桶（这是一个循环探测的过程，6号桶的下一个位置是0号桶），发现此桶为空，故将24填入。最终得到的哈希表如下图所示。

0	1	2	3	4	5	6
24	22	65	45	25	32	

当  $k=13$  时，请将41、189、73、102、280、405、132依次填入下面的哈希表中。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

**【答案】**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		41	280		132	405	189	73			102	

3. 暑假里，庆国一家计划到新开的主题乐园游玩。主题乐园为了保证游客的游玩体验，设置了多个不同级别的主题馆，并制定了以下游玩规则。

①每个主题馆须持与该馆级别相对应的门卡进入，并在入口处盖上该主题馆的印章。

②凭入园票可换取A级主题馆门卡。

③每个主题馆都是单行道，入口、出口有且仅有一个，出馆后无法再进入该馆游玩。

④每个主题馆出口处都有换卡处，门卡上至少有一个该级别的主题馆印章，就可换取下级别主题馆门卡。

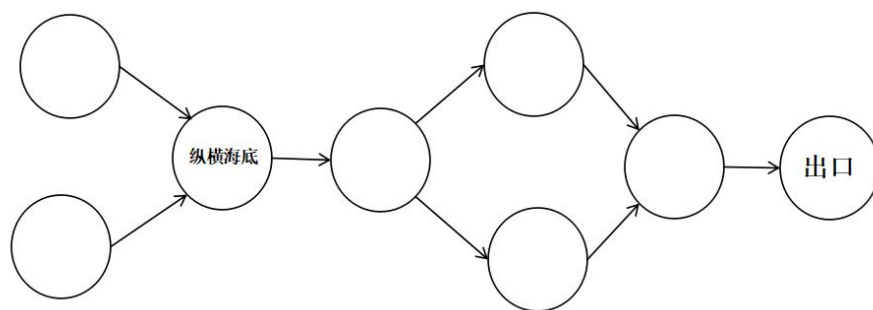
例如，换取 A 级门卡，可以游玩“恐龙基地”和“冰雪世纪”这两个主题馆中的一个或两个，而只要有其中一个主题馆的印章（可也两个都有），即可换取 B 级主题馆的门卡，并前往 B 级主题馆游玩。

官方展示了关于主题馆的游玩级别以及建议游玩时间表。

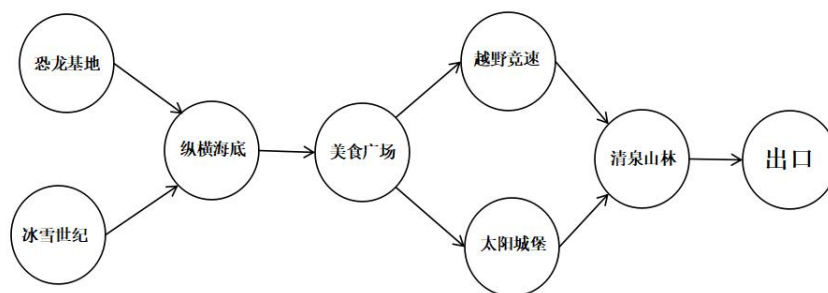
级别	主题馆名称	建议游玩时间（小时）	
A	恐龙基地	1.5	
A	冰雪世纪	1	
B	纵横海底	1	
C	越野竞速	1.5	
C	太阳城堡	1	索道游览： 两个馆共 0.5
D	清泉山林	1.5	

同时，在“纵横海底”主题馆出口处设有美食广场，持 C 级门卡可以享受免费套餐一份。主题乐园的出口在清泉山林的后面，在出口处出示 D 级门卡，可获取乐园纪念品一套。

如果按照等级顺序游玩主题馆，圆圈表示主题馆，用箭头连接先后游玩的两个主题馆（包括美食广场），请你按照上表，补充出庆国一家的游玩顺序图。



【答案】



4. 上一题中，庆国一家人在早上 8 点入园，中午在美食广场午餐一个小时，最后每人都换了一套纪念品。如果不计乐园里从一个馆到另一个馆中途花费的时间，庆国一家人在乐园游玩的最短时间是\_\_\_\_\_小时，最长时间是\_\_\_\_\_小时（包括午餐时间）。

【答案】3.5，8.5

5. 在计算机领域，常用的查找数据的算法有两种。

顺序查找：从序列中的第一个数开始，与要查找的数进行逐个比对。若序列中的某个数与要查找的数相等，则查找成功；反之，若直到序列中最后一个数都和查找的数不相等，则查找失败。

二分查找：二分查找的前提是序列是有序的(升序或者降序)。在二分查找的过程中，先将序列中间位置的数与要查找的数进行比对，若两者相等，则查找成功。否则，利用中间位置的数将序列分成前后两个子序列，如果中间位置的数大于要查找的数（假定此时的序列是升序的），则进一步查找前一序列；如果中间位置的数小于要查找的数，则进一步查找后一序列。重复上述过程(比对子序列中间位置的数，相等则查找成功，不相等就继续拆分序列)，直到找到要查找的数，则查找成功；或直到子序列不存在，此时查找失败。

有以下 19 个元素

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
元素	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	19	20

观察以上元素，我们不难发现，1~20 中缺少了元素\_\_\_\_\_。

若使用顺序查找，从元素 1 开始进行比较，第一个元素是 1，第二个元素是 2，只要找到第 k 个元素不为 k，我们就可以寻找到缺失的元素 k。通过顺序查找找到缺失的元素，需要比较\_\_\_\_\_次。

若使用二分查找，我们从中间的元素开始比较。

①若中间元素与序号相等，则缺失的元素在中间元素的右边。

②若中间元素与序号不相等，且中间元素的前一个元素与其序号相等，则缺失的元素是中间元素的序号。

③若中间元素与序号不相等，且中间元素的前一个元素与其序号依旧不相等，则缺失的元素在中间元素的左边。

④继续取下一个中间元素进行比较，直到找到缺失的元素为止。

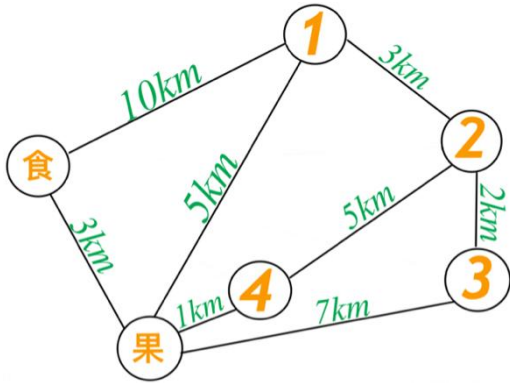
通过二分查找找到缺失的元素，需要比较\_\_\_\_\_次。

【答案】16, 16, 4

6. 你和同学报名参加了一个名为“BigBoss”的类似大富翁的实践游戏，选手作为各家创业公司的管理者为公司运营进行规划。你的小队被分配到一家快餐配送公司，要为4家公司配送工作午餐。每份午餐包括一份主餐和一份水果。每天，配送车从食堂取好主餐后，先前往果园取水果，再将所有餐品配送至各公司。以下是你们为4家公司配送午餐的数量、收费标准以及配送成本。

收费标准				成本			
公司	需要餐品数量 (单位:份)	餐费 (元/份)	果盒 (元/份)	油费 (元/km)	人工费 (元/次)	餐费 (元/份)	果盒 (元/份)
1	2000	50	10	100	100	20	6
2	1000	60	12	100	120	20	6
3	3000	40	8	100	80	20	6
4	2000	50	10	100	100	20	6

现在，有4辆相同的配送车，每辆车都可以存放3000份配有果盒的餐品。请你根据下面的配送路线图（图中“食”为食堂，“果”为果园，1~4分别为公司1、公司2、公司3、公司4），设计出最佳的车辆配送方案，使得每天为4家公司配送完午餐后，获得的总利润最大。



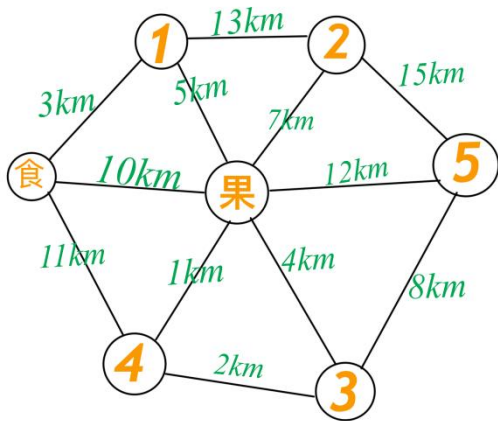
最佳配送方案为：\_\_\_\_\_，总利润最大为\_\_\_\_\_元。

说明：请在配送方案中写明用几辆车，以及每辆车分别配送哪几家公司。

【答案】配送方案：用3辆车，一辆配送公司1和2，一辆配送公司3，一辆配送公司4

最大利润：245100元

7. 现在，公司升级业务，变为物流公司，除了送餐外还增加运送货品的业务。市区的地图也发生变化（如下图）。现在有一单业务，需要从公司5运送食材到食堂去。请根据地图以及下面的魔法表格，在完善表格的同时求出运输的最短距离（km）。提示：魔法表格是一个可以用来计算最短路径的神奇表格。从起始点开始，找到通向其相邻距离最小的邻居节点，并逐步向终点靠近。每一行最短路径可以由上一行最小值得到。表格中，有一个符号 $\infty$ ，表示无穷大。



最短路径	公司1	公司2	公司3	公司4	果园	食堂
------	-----	-----	-----	-----	----	----

5 (起始点)	$\infty$ (公司5与公司1之间没有直达的路径)	15 (公司5与公司2之间直达的路径最短为15)	8 (公司5与公司3之间直达的路径最短为8)	$\infty$ (公司5与公司4之间没有直达的路径)	12 (公司5与果园之间直达的路径最短为12)	$\infty$ (公司5与食堂之间没有直达的路径)
5→3 (上一行中, 公司5到其他各地的路径, 最短为到公司3的8km)	$\infty$	$\infty$	/ (已选入路径的不能再走, 在该空处写“/”)	2	4	$\infty$
5→3→4						
	/	/	/	/	/	/

最后, 通过上表可以求出, 从公司5至食堂的最短运输距离是\_\_\_\_\_公里。

**【答案】**

最短路径	1	2	3	4	果园	食堂
5 (起始点)	$\infty$ (公司5与公司1之间没有直达的路径)	15 (公司5与公司2之间直达的路径最短为15)	8 (公司5与公司3之间直达的路径最短为8)	$\infty$ (公司5与公司4之间没有直达的路径)	12 (公司5与果园之间直达的路径最短为12)	$\infty$ (公司5与食堂之间没有直达的路径)

5→3 (上一行中, 公司 5 到其他各地的路径, 最短为到公司 3 的 8)	$\infty$	$\infty$	/ (已选入路径的不能再走, 在该空处写“/”)	2	4	$\infty$
5→3→4	$\infty$	$\infty$	/	/	1	11
5→3→4 →果	5	7	/	/	/	10
5→3→4 →果→1	/	13	/	/	/	3
5→3→4 →果→1 →食	/	/	/	/	/	/

最短距离为 19 公里

8. 观看 2022 北京冬奥会的开幕仪式后, 小冰做了一个奇怪的梦。在梦里, 她和她的朋友们来到了一个冰雪世界:

第一次: 小冰一个人在冰桥的起点, 有一张通行卡, 冰桥的起点终点两扇门必须刷通行卡才能开。要求小冰以最快的速度通过冰桥, 小冰以 1 分钟的最快速度通过冰桥。

第二次: 小冰和墩墩两个人在冰桥的起点, 只有一张通行卡, 小冰和墩墩一起过桥, 由于墩墩说自己最快需要两分钟才能通过冰桥, 要比小冰用时长, 所以最后最快通过时间是两分钟。

第三次: 有小冰、墩墩、小雪三个人在桥的起点, 只有一张通行卡。三人尝试一起过桥, 警报响起, 尝试多次, 发现最多只能两个人同时过桥。这意味着需要有人将通行卡送回起点, 再一起出发到终点。

已知小冰最快通过时间是 1 分钟, 墩墩最快通过时间是 2 分钟, 小雪最快通过时间是 4 分钟。



总结出过桥的规则，将下表补充完整；根据规则设计使得第三次三人过桥时间最短的方案，计算最短时间。

过桥规则	
1	过桥需要通行卡
2（人数）	
3（时间）	
4（通行卡）	

【答案】

过桥规则	
1	过桥需要通行卡，且只有一张通行卡
2（人数）	每次最多两个人同时过桥
3（时间）	两个人同时过桥，过桥时间等于两人中过桥时间较大的时间
4（通行卡）	过桥后需一个人将通行卡送回起点，直至最后两个人过桥

最短时间为 7 分钟

9. 第四次：有小冰、墩墩，小雪、融融四个人一起在桥的起点准备过桥，只有一张通行卡，过桥规则与第三次相同。已知：小冰、墩墩、小雪、融融四人最快过桥时间分别为：1、2、4、10 分钟。根据前一题的过桥规则，设计第四次四人过桥时间最短的过桥方案，完成列表，并计算最短时间。

过桥方案		
步骤	详细内容	花费时间
step1	小冰和墩墩一起过桥	2 分钟
step2		

过桥方案		
step3		
step4		
step5		

【答案】表格略，最短时间 17 分钟。

10. 第五次：除了小冰、墩墩，小雪、融融四个人，又加入了小冬。现在一共 5 个人一起在桥的起点准备过桥，只有一张通行卡，过桥规则与第三次相同。小冰发现了规律，每一次全员最快顺利通过后，就会增加一人继续过桥。小冰和伙伴们希望通过第三次和第四次的通过经验，总结出了计算最快通过时间的公式。

用字母  $i$  来表示数字，用  $a[i]$  表示第  $i$  个人。用  $T[i]$  表示第  $i$  个人的最快过桥时间，且  $T[i-1] < T[i]$ ； $SmT[i]$  表示  $i$  个人最快的通过时间。每次的安排方案又是怎么样？计算最快通过时间的公式可以如何表示？

【答案】略