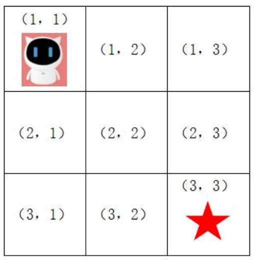
2022年“思维100”STEM应用能力活动（秋季）

四年级参考内容

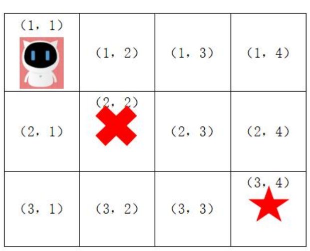
1. 如图1，机器人小V想要从起点（1，1）走到终点（3，3）处，得到红星。如果它每次只能往右走一格或者往下走一格，一共能有多少种不同的走法走到终点呢？



运用递归的方法，我们从最后一步开始推导。小V要走到终点（3，3），它能从（2，3）格走过来，或者从（3，2）格走过来。所以，走到终点（3，3）的方法数=走到（2，3）格的方法数+走到（3，2）格的方法数。假设$f(i,j)$表示走到第i行第j列那一格的方法数，那么$f(3,3)=f(2,3)+f(3,2)$。同样，$f(2,3)=f(1,3)+f(2,2)$，$f(3,2)=f(2,2)+f(3,1)$……于是，不难得出，小V从起点走到终点，一共有______种方法。

【答案】6

2. 现在，小V要从图2的地图中的起点（1，1）走到终点（3，4），每次只能往右走一格或者往下走一格。同时，在（2，2）格处有一个障碍物，它不能走到有障碍物的格子中。这次，它有______种不同的走法。



【答案】4

3. 如图，4×4的棋盘，每一格都放有一定数量的糖果（这一格中的数字表示这一格中的糖果数量）。小V从左上角格开始拿糖果，每次只能往右走一格或者往下走一格，直到走到右下角。整个行走过程中，它能拿到的最多的糖果数是______颗。

1	10	3	8
12	2	9	9
5	7	4	11
3	7	14	5

【答案】51

4. 下表为一个玩具每天的价格（单位：元），你希望通过买卖玩具来赚取零花钱。假设只能选择某一天买下这个玩具，并在之后的某一天卖出这个玩具，那么在只能进行一次买卖的情况下，最多可以赚取多少零花钱？

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天
7	1	5	3	6	4

在这个情景中，只需要找到差值最大的两个数。栈是一种只能在一端进行插入和删除操作的特殊线性表，于是我们可以尝试使用栈的方式来解决这个问题。

算法思路：设初始最大收益为 0 元，我们将 7、1、5、3、6、4 这六个数依次插入到栈中。每次插入数字时，都会碰到以下三种情况中的一种。

情况一：栈中没有元素，我们将其直接插入栈中。

情况二：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素（位于栈最上面的元素）大，将其插入栈中，使其变为新的栈顶元素。

情况三：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素小，计算栈顶元素和栈底元素（位于栈最下面的元素）的差值，若大于最大收益就更新最大收益，否则不做变化。然后将栈顶元素删除，再重复上述操作直至栈空或者要插入的元素比栈顶元素大，我们就将其插入栈中。

所有元素均插入栈后，我们还需最后计算一下栈顶元素和栈底元素的差值，比较该值与当前最大收益的大小，若大于最大收益就更新最大收益。

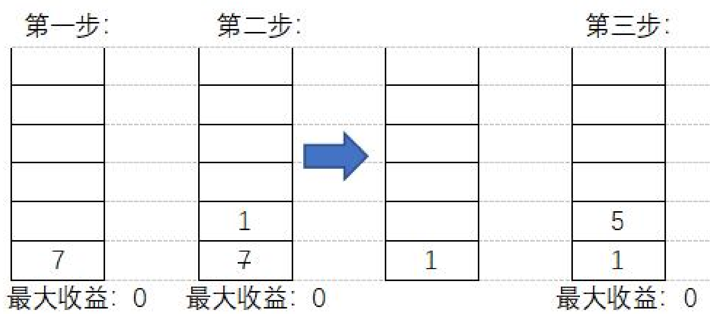
现在，我们就按照以上思路来尝试解题。

第一步：我们要插入元素 7，由于栈为空（属于情况一），我们将 7 插入栈中。

第二步：我们要插入元素 1，由于栈不为空，我们比较 1 与 7 的大小，发现要插入的元素小于栈顶元素（属于情况三），此时栈顶元素为 7，栈底元素为 7，收益为 0（即以 7 元钱买入，又以 7 元钱卖出，收入为 0）。此次买卖的收益不大于最大收益，所以不用更新最大收益值。然后我们将 7 删除，让 1 继续与栈顶元素比较。但此时栈为空，所以插入元素 1。

第三步：我们要插入元素 5，由于栈不为空，我们比较 1 与 5 的大小，发现要插入的元素大于栈顶元素（属于情况二），直接插入 5 到栈顶，使得 5 变为新的栈顶元素。

前三步操作示意图如下。



模仿以上操作，判断各步分别属于哪一种情况，并且当前的最大收益是多少。

注意：只有在删除栈顶元素或所有元素都插入栈之后才会更新最大收益。

第四步：我们要插入元素 3，属于情况_______，当前最大收益是_______元。

第五步：我们要插入元素 6，属于情况_______，当前最大收益是_______元。

第六步：我们要插入元素 4，属于情况_______，当前的最大收益是_______元。

第七步：所有元素均插入栈中，计算栈顶元素和栈底元素的差值，此时差值为_______ ,比当前最大收益_______(填“大”或“小”)，若比最大收益大则需更新最大收益。最终的最大收益为_______元。

【答案】三，4，二，4，三，5，3，小，5

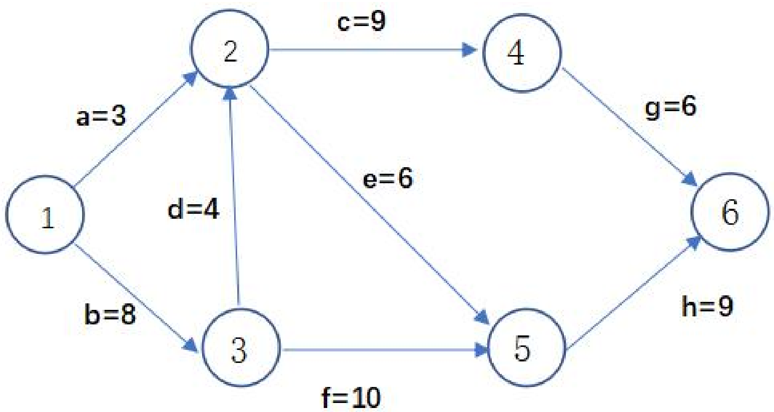
5. 在上一题的情况下，假设不限制买卖的次数（例如可以第一天买入，第二天卖出，第四天再买入，第五天再卖出……），但由于只有一个玩具，所以如果已经买入玩具了，则必须要先把它卖掉才可以再次买入。这时的最大收益是_______元。

【答案】7

6. 完成一项活动都需要消耗一定的时间，下面有一个包含 6 个事件 8 个活动的工程，其中标号 1～6 的圆圈表示 6 个事件，箭头表示活动，箭头上的值表示完成该活动所需的时间（单位：小时）。工程完成过程中有如下两个要求：

①只有某个圈（事件）发生后，从该圈出发的箭头（活动）才能开始。

②只有在指向某个圈的所有箭头（活动）都已经结束时，该圈（事件）才能发生。



按箭头指向依次完成部分或全部事件的有序排列称为路径，例如到达事件 2 有两条路径，分别为 1→2，1→3→2。具有最大路径长度的路径称为关键路径，关键路径上的活动称为关键活动。

从事件 1 开始动工后，至少需要经过_______小时，事件 2 可以动工。

【答案】12

7. 从事件 1 到事件 6 的路径有哪些？请分别写在下方横线上（如横线不够，可自行补充），并分别写出各条路径所用时长为多少。

路径 1：______________________，用时_______小时。

路径 2：______________________，用时_______小时。

路径 3：______________________，用时_______小时。

路径 4：______________________，用时_______小时。

路径 5：______________________，用时_______小时。

【答案】1→2→4→6，18

1→2→5→6，18

1→3→2→4→6，27

1→3→2→5→6，27

1→3→5→6，27

8. 从事件 1 到事件 6 的关键路径是________________（如有多条，请全部列出），该工程至少需要______小时可以完工？

【答案】1→3→2→4→6、1→3→2→5→6、1→3→5→6，27

9. 有一艘宇宙飞船，要足够的能量石才能完成太空探索工作，因此宇航员罗伯特需要收集一定数量的能量石来启动飞船。现在，罗伯特总共需要 5 颗能量石，他可以分几次来收集。每一次，他可以收集 1 颗，也可以收集 2 颗。因此，他可以按照 (1,1,1,1,1) 的顺序收集（即收集 5 次，每次收集 1 颗），也可以按照(1,2,2)的顺序收集（收集 3 次，第一次收集 1 颗，后两次分别收集 2 颗）。那么，他一共有几种不同的收集顺序？

我们可以用斐波那契数列来求解这一问题。斐波那契数列指的是这样一个数列：$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots\ldots$从第三个数字开始，每个数字都等于前两个数字之和。我们用$f(n)$表示收集n颗能量石的不同顺序数量，并且有$f(0)=1$。于是，$f(1)=1$，$f(2)=2=f(0)+f(1)$，$f(3)=3=f(1)+f(2)$，符合斐波那契数列的规律。于是，我们可以进一步计算$f(4)=f(___)+f(___)=$ ______，$f(5)=f(___)+f(___)=$______。

【答案】$f(4)=f(2)+f(3)=5$，$f(5)=f(3)+f(4)=8$

10. 现在，罗伯特仍然要收集 5 颗能量石，但他每次可以收集 1 颗、2 颗、3 颗、4 颗, 或 5 颗，那么他有几种收集顺序？注意，现在每次最多能 5 颗了，所以也要对斐波那契数列进行一些变化：$f(0)=1$，$f(1)=1$，$f(2)=f(1)+f(0)=2$，
$f(3)=f(2)+f(1)+f(0)=2\times f(2)=4$，
$f(4)=f(___)+f(___)+f(___)+f(___)=$______，
$f(5)=f(___)+f(___)+f(___)+f(___)+f(___)=$______。

【答案】$f(4)=f(3)+f(2)+f(1)+f(0)=8$，
$f(5)=f(4)+f(3)+f(2)+f(1)+f(0)=16$

11. 根据前两题，我们推广到一般情况：罗伯特需要收集n颗能量石，他每次可以选择收集 1 颗、2 颗、……、n颗能量石。已知他收集$n-1$颗能量石有a种收集顺序，那么他收集n颗能量石有______种收集顺序。

【答案】$2a$

12. 观看 2022 北京冬奥会的开幕仪式后，小冰做了一个奇怪的梦。在梦里，她和她的朋友们来到了一个冰雪世界：

第一次：小冰一个人在冰桥的起点，有一张通行卡，冰桥的起点终点两扇门必须刷通行卡才能开。要求小冰以最快的速度通过冰桥，小冰以 1 分钟的最快速度通过冰桥。

第二次：小冰和墩墩两个人在冰桥的起点，只有一张通行卡，小冰和墩墩一起过桥，由于墩墩说自己最快需要两分钟才能通过冰桥，要比小冰用时长，所以最后最快通过时间是两分钟。

第三次：有小冰、墩墩、小雪三个人在桥的起点，只有一张通行卡。三人尝试一起过桥，警报响起，尝试多次，发现最多只能两个人同时过桥。这意味着需要有人将通行卡送回起点，再一起出发到终点。

已知小冰最快通过时间是 1 分钟，墩墩最快通过时间是 2 分钟，小雪最快通过时间是 4 分钟。

总结出过桥的规则，将下表补充完整；根据规则设计使得第三次三人过桥时间最短的方案，计算最短时间。

过桥规则	
1	过桥需要通行卡
2（人数）	
3（时间）	
4（通行卡）	

【答案】

过桥规则	
1	过桥需要通行卡，且只有一张通行卡
2（人数）	每次最多两个人同时过桥
3（时间）	两个人同时过桥，过桥时间等于两人中过桥时间较大的时间

过桥规则	
4（通行卡）	过桥后需一个人将通行卡送回起点，直至最后两个人过桥

最短时间为 7 分钟

13. 第四次：有小冰、墩墩，小雪、融融四个人一起在桥的起点准备过桥，只有一张通行卡，过桥规则与第三次相同。已知：小冰、墩墩、小雪、融融四人最快过桥时间分别为：1、2、4、10 分钟。根据前一题的过桥规则，设计第四次四人过桥时间最短的过桥方案，完成列表，并计算最短时间。

过桥方案		
步骤	**详细内容**	**花费时间**
step1	小冰和墩墩一起过桥	2 分钟
step2		
step3		
step4		
step5		

【答案】表格略，最短时间 17 分钟。

14. 第五次：除了小冰、墩墩，小雪、融融四个人，又加入了小冬。现在一共 5 个人一起在桥的起点准备过桥，只有一张通行卡，过桥规则与第三次相同。小冰发现了规律，每一次全员最快顺利通过后，就会增加一人继续过桥。小冰和伙伴们希望通过第三次和第四次的通过经验，总结出了计算最快通过时间的公式。

用字母 i 来表示数字，用 $a[i]$ 表示第 i 个人。用 $T[i]$ 表示第 i 个人的最快过桥时间，且 $T[i\text{-}1]< T[i]$；$SmT[i]$ 表示 i 个人最快的通过时间。每次的安排方案又是怎么样？计算最快通过时间的公式可以如何表示？

【答案】略