

2022年“思维100”STEM应用能力训练活动（秋季）

五年级模拟题库

一、基础知识

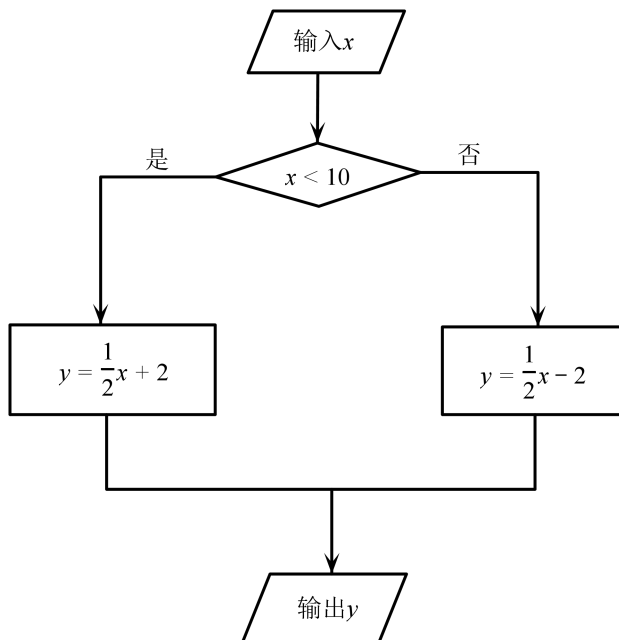
1. 计算： $21 \times 22 \times \frac{1}{21+22} \times \left(\frac{22}{21} - \frac{21}{22} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】1

2. 莫莫有10支相同的棒棒糖，需要分给小猫、小狗、小兔子，每人至少分一支，棒棒糖可以完全分完，也可以有剩余。莫莫共有_____种分法。

【答案】120

3. 根据流程图中的程序，当输入数值 x 为16时，输出数值 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】6

4. 所有正整数都可以表示为4个完全平方数之和，但是有一些正整数无法表示为3个完全平方数之和。所有无法表示为3个完全平方数之和的数中最小的两个数之和为_____。

【答案】22

5. 如果正整数 A, B 均小于 10000。将 A 除以 B 得到的余数为 1，将 B 除以 A 得到的余数为 2020。若 A 的所有数码之和为 17，则有序数对 $A+B=$ _____。

【答案】10101

6. 有 5 名嫌疑犯，其中只有一名是真正的罪犯。警察对他们进行了审问。

A 说：“ B, C 中有一人是罪犯。”

B 说：“我和 E 都不是罪犯。”

C 说：“ A, B 都在撒谎。”

D 说：“ A, B, C 中有一人说了真话，另外两人撒谎。”

E 说：“ D 说的是假话。”

警察知道 5 人中有且仅有 3 人说了真话。则_____是罪犯。

【答案】 C

7. 一辆汽车从 A 地匀速行驶前往 B 地。如果汽车的速度比原计划增加 12 千米/小时，则提前 3 小时到达；如果速度再增加 30 千米/小时，则又提前 4 小时到达。 A, B 两地的距离为_____千米。

【答案】720

8. 学校联盟足球赛进行单循环赛，即每支球队都会与其它队伍恰好比赛一场。大会规定每一场比赛获胜的队伍可以获得 3 分，输球的队伍获得 0 分，平局则各获得 1 分。已知全部赛事结束后，共有十五分之一的球队总分为 0 分，共有十五分之一的球队总分为 3 分，则本次比赛总共有_____支球队参加。

【答案】15

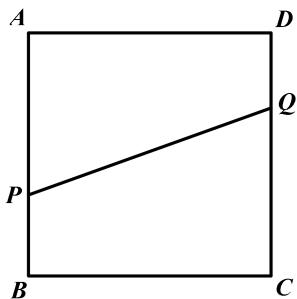
9. 一个圆形跑道的周长为 20 米。甲、乙两人在圆周上同一点同时出发，甲以每秒 1.5 米的速度绕圆周顺时针方向运动，乙以每秒 3.5 米的速度绕圆周逆时针方向运动。如果两人运动的时间足够长，那么他们在这个圆周上位置不同的相遇点共有_____个。

【答案】10

10. 如果正整数 p, q 使得 $\frac{q}{p}$ 和 $\frac{p}{q}$ 都是有限小数，则有序数对 (p, q) 就称为“好对”。若 k 为三位数， $(k, 650)$ 为“好对”，满足要求的 k 有_____个。

【答案】9

11. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 、 Q 分别在 AB 、 CD 上， $AP=2PB$ ， $APQD$ 和 $BPQC$ 的面积分别为 20、21，则 $\frac{DQ}{CQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{38}{85}$

12. $(\overline{abcdef})_6$ 是一个六进制数，其每一个数码要么是 1，要么是 3。将它换算成十进制数后其值为 N ，且 N 是 63 的倍数。当 N 取到最小值时， $a+b+c+d+e+f = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(最终结果用十进制数表示)

【答案】10

13. 我们用 $\tau(N)$ 表示正整数 N 的正因数个数，若 $\begin{cases} N \leq 1000 \\ \tau(N^2) \geq 5 \\ \tau((N+1)^2) \geq 5 \end{cases}$ ，这样的正整数 N 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个

(注意：在 1 到 1000 这个范围内共有 168 个素数)。

【答案】665

14. 老师从 1~40 中选出一个整数，他将这个数除以 7 的余数告诉甲，又将这个数的正因数个数告诉乙。甲、乙双方都知道这个规则，但是两人都搞反了。也就是说，甲以为老师告诉他的是这个数的正因数个数，乙以为老师告诉他的是这个数除以 7 的余数。接下来发生如下的对话。

甲说：“我知道这个数是多少了。”

乙说：“我也知道这个数是多少了。”

接下来，甲、乙两人公布各自猜测的数，他们发现他们猜测的是同一个数，但是这个数并不是老师所选出的数。至此，他们发现他们搞反了。那么，事实上老师选出的数是_____。

【答案】5 或 19

15. 将正整数 n 的所有正因数从小到大排列得 $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{k-1} < d_k = n$ ，其中 $k \geq 4$ 。满足 $\frac{d_{k-1}}{d_2} = 15$ 的 $n =$ _____。

【答案】60 或 135

16. 现在有 160 个鸽子和 n 个空格，第 1 个鸽子飞入第 1 个空格，第 2 个鸽子飞入第 4 个空格，第 3 个鸽子飞入第 9 个空格，……，第 k 个鸽子飞入第 $k^2 \pmod{n}$ 个空格，这里 $k^2 \pmod{n}$ 表示 k^2 除以 n 的余数。为了保证每个空格内最多有一个鸽子，则 n 的最小值为_____。

【答案】326

17. 若干箱货物总重 19.5 吨，每箱重量不超过 353 千克。今有载重量为 1.5 吨的汽车，至少需要多少_____辆，才能保证把这些货物一次全部运走。（整箱货物不能拆开）

【答案】16

18. n 是一个正整数，有如下的性质：

- ① n 的所有素因数不超过 10；
- ② n 一共有 $2k$ 个正因数，从小到大将其表示为 $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_{2k} = n$ ；
- ③ $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_k = 3k$ 。

请写出所有满足条件的 n ：_____。

【答案】35、125、45、75、54、42 或 40

二、STEM 应用

19. 下表为一个玩具每天的价格（单位：元），你希望通过买卖玩具来赚取零花钱。假设只能选择某一天买下这个玩具，并在之后的某一天卖出这个玩具，那么在只能进行一次买卖的情况下，最多可以赚取多少零花钱？

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天
6	2	7	3	9

在这个情景中，只需要找到差值最大的两个数。栈是一种只能在一端进行插入和删除操作的特殊线性表，于是我们可以尝试使用栈的方式来解决这个问题。

算法思路：设初始最大收益为 0 元，我们将 6、2、7、3、9 这五个数依次插入到栈中。每次插入数字时，都会碰到以下三种情况中的一种。

情况一：栈中没有元素，我们将其直接插入栈中。

情况二：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素（位于栈最上面的元素）大，将其插入栈中，使其变为新的栈顶元素。

情况三：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素小，计算栈顶元素和栈底元素（位于栈最下面的元素）的差值，若大于最大收益就更新最大收益，否则不做变化。然后将栈顶元素删除，再重复上述操作直至栈空或者要插入的元素比栈顶元素大，我们就将其插入栈中。

所有元素均插入栈后，我们还需最后计算一下栈顶元素和栈底元素的差值，比较该值与当前最大收益的大小，若大于最大收益就更新最大收益。

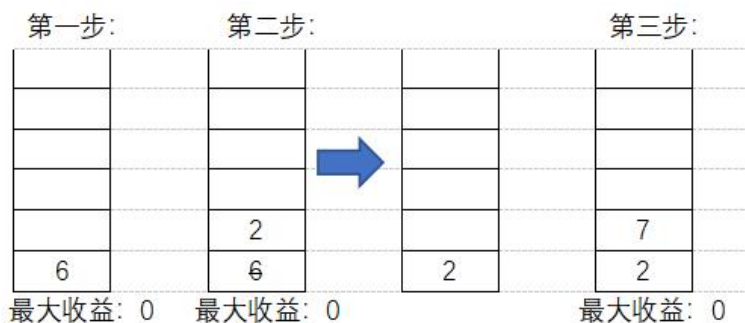
现在，我们就按照以上思路来尝试解题。

第一步：我们要插入元素 6，由于栈为空（属于情况一），我们将 6 直接插入栈中。

第二步：我们要插入元素 2，由于栈不为空，我们比较 2 与 6 的大小，发现要插入的元素小于栈顶元素（属于情况三），此时栈顶元素为 6，栈底元素为 6，收益为 0（即以 6 元钱买入，又以 6 元钱卖出，收入为 0）。此次买卖的收益不大于最大收益，所以不用更新最大收益值。然后我们将 6 删除，让 2 继续与栈顶元素比较。但此时栈为空，所以插入元素 2。

第三步：我们要插入元素 7，由于栈不为空，我们比较 2 与 7 的大小，发现要插入的元素大于栈顶元素（属于情况二），直接插入 7 到栈顶，使得 7 变为新的栈顶元素。

前三步操作示意图如下。



模仿以上操作，判断各步分别属于哪一种情况，并且当前的最大收益是多少。

注意：只有在删除栈顶元素或所有元素都插入栈之后才会更新最大收益。

第四步：我们要插入元素 3，属于情况 __，当前最大收益是__元。

第五步：我们要插入元素 9，属于情况 __，当前最大收益是__元。

第六步：所有元素均已插入栈中，计算栈顶元素和栈底元素的差值，此时差值为__，比当前最大收益__(填“大”或“小”)，若比最大收益大则需更新最大收益。最终的最大收益为__元。

【答案】三，5，二，5，7，大，7

20. 在上一题的情况下，假设买卖的天数变多了（玩具每天的价格如下所示），并且不限制买卖的次数（例如可以第一天买入，第二天卖出，第四天再买入，第五天再卖出……），但由于只有一个玩具，所以如果已经买入玩具了，则必须要先把它卖掉才可以再次买入。这时的最大收益是_____元。

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天
6	2	7	3	9	4
第七天	第八天	第九天	第十天	第十一天	第十二天
9	6	4	1	10	5
第十三天	第十四天	第十五天	第十六条	第十七天	第十八天
6	8	3	4	6	10

【答案】35

21. 观看 2022 北京冬奥会的开幕仪式后，小冰做了一个奇怪的梦。在梦里，她和她的朋友们来到了一个冰雪世界：

第一次：小冰一个人在冰桥的起点，有一张通行卡，冰桥的起点终点两扇门必须刷通行卡才能开。要求小冰以最快的速度通过冰桥，小冰以 1 分钟的最快速度通过冰桥。

第二次：小冰和墩墩两个人在冰桥的起点，只有一张通行卡，小冰和墩墩一起过桥，由于墩墩说自己最快需要两分钟才能通过冰桥，要比小冰用时长，所以最后最快通过时间是两分钟。

第三次：有小冰、墩墩、小雪三个人在桥的起点，只有一张通行卡。三人尝试一起过桥，警报响起，尝试多次，发现最多只能两个人同时过桥。这意味着需要有人将通行卡送回起点，再一起出发到终点。

已知小冰最快通过时间是 1 分钟，墩墩最快通过时间是 2 分钟，小雪最快通过时间是 4 分钟。

总结出过桥的规则，将下表补充完整；根据规则设计使得第三次三人过桥时间最短的方案，计算最短时间。

过桥规则	
1	过桥需要通行卡
2（人数）	
3（时间）	
4（通行卡）	

【答案】

过桥规则	
1	过桥需要通行卡，且只有一张通行卡
2（人数）	每次最多两个人同时过桥
3（时间）	两个人同时过桥，过桥时间等于两人中过桥时间较大的时间

过桥规则	
4 (通行卡)	过桥后需一个人将通行卡送回起点，直至最后两个人过桥

最短时间为 7 分钟

22. 第四次：有小冰、墩墩，小雪、融融四个人一起在桥的起点准备过桥，只有一张通行卡，过桥规则与第三次相同。已知：小冰、墩墩、小雪、融融四人最快过桥时间分别为：1、2、4、10 分钟。根据前一题的过桥规则，设计第四次四人过桥时间最短的过桥方案，完成列表，并计算最短时间。

过桥方案		
步骤	详细内容	花费时间
step1	小冰和墩墩一起过桥	2 分钟
step2		
step3		
step4		
step5		

【答案】表格略，最短时间 17 分钟。

23. 第五次：除了小冰、墩墩，小雪、融融四个人，又加入了小冬。现在一共 5 个人一起在桥的起点准备过桥，只有一张通行卡，过桥规则与第三次相同。小冰发现了规律，每一次全员最快顺利通过后，就会增加一人继续过桥。小冰和伙伴们希望通过第三次和第四次的通过经验，总结出了计算最快通过时间的公式。

用字母 i 来表示数字，用 $a[i]$ 表示第 i 个人。用 $T[i]$ 表示第 i 个人的最快过桥时间，且 $T[i-1] < T[i]$ ； $SmT[i]$ 表示 i 个人最快的通过时间。每次的安排方案又是怎么样？计算最快通过时间的公式可以如何表示？

【答案】略