

2021年“思维100”STEM应用能力训练活动（秋季）

模拟内容

注：本模拟内容不分年级组，仅供选手了解活动内容和形式，三年级无第三大题。

一、填空题A（本大题共7小题，每题6分，共42分）

- 中国南极考察队将乘坐“雪龙N号”从上海出发前去南极考察。考察队有2名同行少年志愿者名额，要从10名少年志愿者候选人中选出2人。每个参与投票的人必须从这10名候选人中选2个不同的人，那么至少有_____人参加投票，才能保证必有不少于4人投了相同的2个候选人的票。

【答案】136

- 你和另一名同学最终获得同行名额。出发前，考察队负责人对你们进行培训。负责人说道：“恭喜你们获得最终的同行名额。我们一共收到的志愿者报名数是一个三位数，很有趣的是，这个三位数的数码之和正好等于这个三位数的后两位数。”所以你们至少是从_____人中被选出的。

【答案】910

- 负责人将所需要熟背的注意事项以及物种介绍做成了51张小卡片放在文件盒里交给你们，每张小卡片上都有一个标号。助理在取卡片的时候不小心取错了一张。助理表示，标号1~50的卡片没有问题，而取错的卡片号码大于100，但不超过200。现在每次从盒中任意摸出5张卡片，然后算出这5张卡片上所有数的和，再将这个和的后两位数写在一张新卡片上放入盒子中（如果最后盒子里不足五张但又多于一张，则全部取出计算，并放入）。经过若干次这样的操作后，盒中还剩下一张卡片，上面写的是86。那么助理取错的那一张卡片的标号是_____。

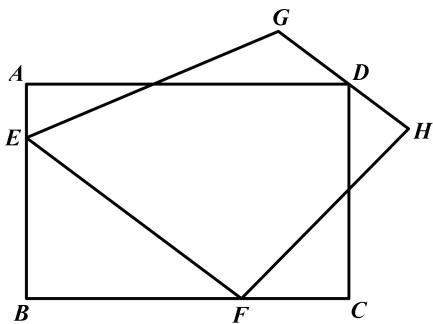
【答案】111

- 你们乘坐“雪龙N号”前往南极时路过一片冰域，冰域上插着标号1~100的小旗子用来标记这附近是否有暗礁。如果旗子的标号的素因数可以分解为 $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ ，

其中 p_1, p_2, \dots, p_k 是不同的素数， r_1, r_2, \dots, r_k 都大于等于 2，则这个旗子附近就有暗礁。那么这片冰域内有暗礁_____个。

【答案】12

5. 为了改善南极冰川融化给全球气候带来的影响，考察队曾在南极海底种植珊瑚。种植时按照长为 6 米，宽为 4 米的长方形区域种植。没想到珊瑚在海底生长时位置发生了变化。如图，长方形 $ABCD$ 是当时种植的区域，四边形 $EFHG$ 是现在珊瑚生长的实际区域。通过测量， E 是 AB 上的点， $AE = 1$ 米。 F 是 BC 上的点， $CF = 2$ 米。若 $GH = 2$ 米，且 $GH//EF$ ，则现在珊瑚生长的区域，即梯形 $EFHG$ 的面积是_____平方米。



【答案】15.4

6. 你们在南极时发现有不同的巡逻员每天都出去执行巡逻任务。负责人为你们介绍：“我们这里一共驻扎了 30 名巡逻员，他们的编号 1~30。每天我们会从中选出 3 名巡逻员去进行巡逻。巡逻点一共有 8 个，选择的巡逻员标号的乘积正好是 8 的整数倍。这样的选择有_____种不同的选法。”

【答案】1925

7. 考察队在南极进行地点考察时会将已经考察过的点的坐标记录下来，为保证考察内容的安全性，会将坐标进行加密。若五位数 \overline{abcde} 的数码之和 $S(\overline{abcde}) = a + b + c + d + e$ 是 17 的倍数，则称其为“好数”。若 x 、 $x+1$ 都是“好数”，则 $(x, x+1)$ 称为一个“好数对”。我们用 $(p, p+1)$ 表示最小的“好数对”， $(q, q+1)$ 表示最大的“好数对”，则 $q - p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】79200

二、填空题 B（本大题共 3 小题，共 40 分）

8. 下表为一个玩具每天的价格（单位：元），你希望通过买卖玩具来赚取零花钱。假设只能选择某一天买下这个玩具，并在之后的某一天卖出这个玩具，那么在只能进行一次买卖的情况下，最多可以赚取多少零花钱？

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天
7	1	5	3	6	4

在这个情景中，只需要找到差值最大的两个数。栈是一种只能在一端进行插入和删除操作的特殊线性表，于是我们可以尝试使用栈的方式来解决这个问题。

算法思路：设初始最大收益为 0 元，我们将 7、1、5、3、6、4 这六个数依次插入到栈中。每次插入数字时，都会碰到以下三种情况中的一种。

情况一：栈中没有元素，我们将其直接插入栈中。

情况二：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素（位于栈最上面的元素）大，将其插入栈中，使其变为新的栈顶元素。

情况三：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素小，计算栈顶元素和栈底元素（位于栈最下面的元素）的差值，若大于最大收益就更新最大收益，否则不做变化。然后将栈顶元素删除，再重复上述操作直至栈空或者要插入的元素比栈顶元素大，我们就将其插入栈中。

所有元素均插入栈后，我们还需最后计算一下栈顶元素和栈底元素的差值，比较该值与当前最大收益的大小，若大于最大收益就更新最大收益。

现在，我们就按照以上思路来尝试解题。

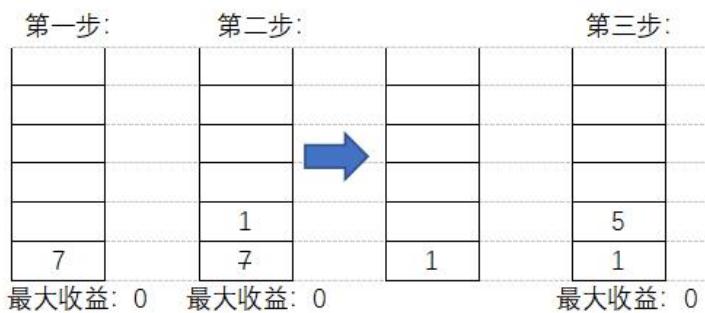
第一步：我们要插入元素 7，由于栈为空（属于情况一），我们将 7 插入栈中。

第二步：我们要插入元素 1，由于栈不为空，我们比较 1 与 7 的大小，发现要插入的元素小于栈顶元素（属于情况三），此时栈顶元素为 7，栈底元素为 7，收益为 0

(即以 7 元钱买入，又以 7 元钱卖出，收入为 0)。此次买卖的收益不大于最大收益，所以不用更新最大收益值。然后我们将 7 删除，让 1 继续与栈顶元素比较。但此时栈为空，所以插入元素 1。

第三步：我们要插入元素 5，由于栈不为空，我们比较 1 与 5 的大小，发现要插入的元素大于栈顶元素（属于情况二），直接插入 5 到栈顶，使得 5 变为新的栈顶元素。

前三步操作示意图如下。



模仿以上操作，判断各步分别属于哪一种情况，并且当前的最大收益是多少。

注意：只有在删除栈顶元素或所有元素都插入栈之后才会更新最大收益。

第四步：我们要插入元素 3，属于情况____，当前最大收益是____元。

第五步：我们要插入元素 6，属于情况____，当前最大收益是____元。

第六步：我们要插入元素 4，属于情况____，当前的最大收益是____元。

第七步：所有元素均插入栈中，计算栈顶元素和栈底元素的差值，此时差值为____，比当前最大收益____（填“大”或“小”），若比最大收益大则需更新最大收益。最终的最大收益为____元。

【答案】三，4，二，4，三，5，3，小，5

9. 定义一种整数集合上的新运算：取模运算，用符号“%”表示，读作模。它的意思是取一个数除以另一个数的余数。例如： $25\%7$ ，读作二十五模七，意思是取 25 除以 7 的余数，我们知道 $25 \div 7 = 3 \dots\dots 4$ ，因此 $25\%7=4$ 。在定义一个神奇的函数 $f(x)=x\%k$ ，它相当于一个神奇的“中间商”，你给它一个数字，它就会返回给你另一个与之对应

数字，这个数字是它对于给定的正整数 k 的模数，并把它作为 $f(x)$ 的值。例如：给定一个整数 $k=7$ ， $f(25)=25\%7=4$ 。则对于正整数 $k=7$ ，计算哈希函数 $f(2019)=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】3

10. 上一题中，这个“中间商”的记忆力不是特别好，所以需要将一些数字对应的哈希函数值以表格形式记下来，这张表就叫做哈希表。例如当 $k=7$ 时，先画出一个空的哈希表如下图所示。

0	1	2	3	4	5	6

现在需要将 45、25、65、22、32、24，依次填入哈希表之。先计算 $f(45)=3$ ，将 45 填入 3 下面的空格（也叫做桶）中。再按照这一方法依次填入 25、65、22，如下图所示。

0	1	2	3	4	5	6
	22	65	45	25		

当在计算 $f(32)$ 的时候，我们发现 $f(32)=4$ ，而 4 下面对应的桶已经被占用。我们将这样的桶被占用的情况称作一次冲突。当出现冲突时，我们需要解决冲突，即在表中寻找一个空白的桶，将发生冲突的数字填进去。现在提供一种解决冲突的方法：当 x 对应的 m 号桶被占用时，我们从当前位置开始，向后探测 i^2 ($i=1, 2, 3, \dots$) 个位置，直到找到一个空白的桶，然后将其填入。例如， $f(32)=4$ ，我们从 4 号桶开始向后探测，第一次探测 1^2 个位置，到达 5 号桶，发现此桶为空，故将 32 填入 5 号桶（如果一次探测不到就将 i 加 1，继续探测直到找到空的桶），得到：

0	1	2	3	4	5	6
	22	65	45	25	32	

继续计算 $f(24)=3$ ，3号桶被占用，向后探测 1^2 个位置，到达4号桶，4号桶仍被占用，将 i 的值加1，此时 $i=2$ ，下一步从原位置向后探测 2^2 个位置，到达0号桶（这是一个循环探测的过程，6号桶的下一个位置是0号桶），发现此桶为空，故将24填入。最终得到的哈希表如下图所示。

0	1	2	3	4	5	6
24	22	65	45	25	32	

当 $k=13$ 时，请将41、189、73、102、280、405、132依次填入下面的哈希表中。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

【答案】

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		41	280		132	405	189	73			102	

三、解答题（共18分，第1小问6分，第2小问12分，请写出解题过程）

11. 如果一个正整数 N 的任意倍数的末两位数码都是偶数，则 N 就称为“超级偶数”。

(1) 请判断：24是不是“超级偶数”

(2) 我们用 S 表示 $1 \leq n \leq 2021$ 这个范围内所有“超级偶数”之和，求： S 。

【答案】 (1) 不是 (2) 103020