

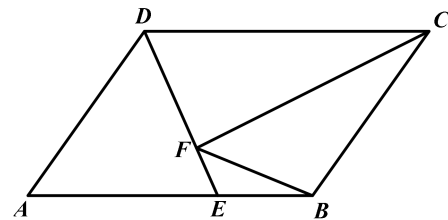
2021年“思维100”STEM数学应用能力训练活动（春季） 五年级 决赛

学校_____ 姓名_____ 活动券编号_____

题型	一	二	三	总分
得分				

一、填空题 A（本大题共 8 小题，1~6 题每题 6 分，第 7 题 7 分，第 8 题 5 分，共 48 分）

1. 计算： $404.2 \times 4 + 8.084 \times 5^2 - 404.2 \times \frac{3}{5} + 8.084 \times 5 \times 11 =$ _____。
2. 若 $\begin{cases} A = 2^3 - 3^2 + 4 \times (5+1) \\ B = 7^2 - 2 \times (3+1)^2 \end{cases}$ ，则 $A - B =$ _____。
3. 若正整数 N 除以 7 的余数为 5，则 $32N + 18$ 除以 7 的余数为_____。
4. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $CD = 18$ ，点 E 在 AB 上， $AE = 12$ 。点 F 在 DE 上， $\triangle BEF$ 、 $\triangle CDF$ 的面积分别为 30、162。则 $\triangle BFC$ 的面积为_____。



5. n 是一个非零数码，由 1、2、3、 n 构成的所有四位数中，最大数减去最小数得到的差值为 2088。则 $n =$ _____。
6. 我们用 $\tau(N)$ 表示正整数 N 的正因数个数。如果对于任意小于 N 的正整数 M ，都有 $\tau(M) < \tau(N)$ ，则称 N 为“好数”，比如 2、4、6 都是“好数”。则 $2^3 \times 3^4 \times 5$ _____ “好数”（填“是”或者“不是”）。
7. 下表为一个玩具每天的价格（单位：元），你希望通过买卖玩具来赚取零花钱。假设只能选择某一天买下这个玩具，并在之后的某一天卖出这个玩具，那么在只能进行一次买卖的情况下，最多可以赚取多少零花钱？

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天
6	2	7	3	9

在这个情景中，只需要找到差值最大的两个数。栈是一种只能在一端进行插入和删除操作的特殊线性表，于是我们可以尝试使用栈的方式来解决这个问题。

算法思路：设初始最大收益为 0 元，我们将 6、2、7、3、9 这五个数依次插入到栈中。每次插入数字时，都会碰到以下三种情况中的一种。

情况一：栈中没有元素，我们将其直接插入栈中。

情况二：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素（位于栈最上面的元素）大，将其插入栈中，使其变为新的栈顶元素。

情况三：栈中有元素，并且要插入的元素比栈顶元素小，计算栈顶元素和栈底元素（位于栈最下面的元素）的差值，若大于最大收益就更新最大收益，否则不做变化。然后将栈顶元素删除，再重复上述操作直至栈空或者要插入的元素比栈顶元素大，我们就将其插入栈中。

所有元素均插入栈后，我们还需最后计算一下栈顶元素和栈底元素的差值，比较该值与当前最大收益的大小，若大于最大收益就更新最大收益。

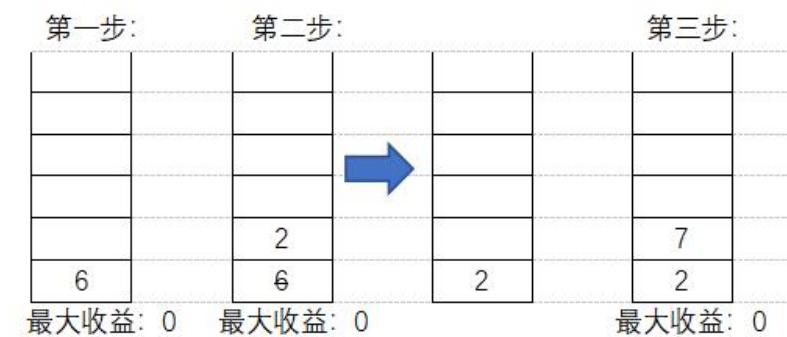
现在，我们就按照以上思路来尝试解题。

第一步：我们要插入元素 6，由于栈为空（属于情况一），我们将 6 直接插入栈中。

第二步：我们要插入元素 2，由于栈不为空，我们比较 2 与 6 的大小，发现要插入的元素小于栈顶元素（属于情况三），此时栈顶元素为 6，栈底元素为 6，收益为 0（即以 6 元钱买入，又以 6 元钱卖出，收入为 0）。此次买卖的收益不大于最大收益，所以不用更新最大收益值。然后将 6 删除，让 2 继续与栈顶元素比较。但此时栈为空，所以插入元素 2。

第三步：我们要插入元素 7，由于栈不为空，我们比较 2 与 7 的大小，发现要插入的元素大于栈顶元素（属于情况二），直接插入 7 到栈顶，使得 7 变为新的栈顶元素。

前三步操作示意图如下。



模仿以上操作，判断各步分别属于哪一种情况，并且当前的最大收益是多少。

注意：只有在删除栈顶元素或所有元素都插入栈之后才会更新最大收益。

（请继续完成反面内容）

第四步：我们要插入元素 3，属于情况_____，当前最大收益是_____元。

第五步：我们要插入元素 9，属于情况_____，当前最大收益是_____元。

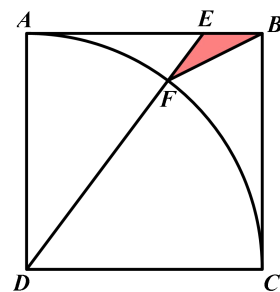
第六步：所有元素均已插入栈中，计算栈顶元素和栈底元素的差值，此时差值为_____,比当前最大收益_____(填“大”或“小”)，若比最大收益大则需更新最大收益。最终的最大收益为_____元。

8. 在上一题的情况下，假设买卖的天数变多了（玩具每天的价格如下所示），并且不限制买卖的次数（例如可以第一天买入，第二天卖出，第四天再买入，第五天再卖出……），但由于只有一个玩具，所以如果已经买入玩具了，则必须要先把它卖掉才可以再次买入。这时的最大收益是_____元。

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天
6	2	7	3	9	4
第七天	第八天	第九天	第十天	第十一天	第十二天
9	6	4	1	10	5
第十三天	第十四天	第十五天	第十六天	第十七天	第十八天
6	8	3	4	6	10

二、填空题 B（本大题共 5 小题，每题 8 分，共 40 分）

9. 如图，正方形的边长为 4，点 E 在 AB 上， $BE=1$ 。以点 D 为圆心， DC 为半径作四分之一圆交 DE 于点 F 。则 $\triangle BEF$ 的面积为_____。



10. 将正整数 N 用二进制表示，其二进制表示中有 7 个数码，并且不存在相邻的数码 1。将所有满足要求的正整数 N 相加，和为_____（和用 10 进制表示）。

11. 老师从 1~40 中选出一个整数，他将这个数除以 7 的余数告诉甲，又将这个数的正因数个数告诉乙。甲、乙双方都知道这个规则，但是两人都搞反了。也就是说，甲以为老师告诉他的是这个数的正因数个数，乙以为老师告诉他的是这个数除以 7 的余数。接下来发生如下的对话。

甲说：“我知道这个数是多少了。”

乙说：“我也知道这个数是多少了。”

接下来，甲、乙两人公布各自猜测的数，他们发现他们猜测的是同一个数，但是这个数并不是老师所选出的数。至此，他们发现他们搞反了。那么，事实上老师选出的数是_____。

12. 若 n 是小于 1000000 的正整数，它的所有数码都是 0、1 或 9，并且 n 是 7 的倍数，这样的 n 有_____个。

13. 将 5 颗相同的黑棋、5 颗相同的白棋排成一行，则其中有连续 3 颗棋子依序为“黑白黑”的排列方法有_____种。

三、解答题（第 1 小问 4 分，第 2 小问 8 分）

14. 每个日期都能写成 $m/d/y$ 的形式，其中 m 表示月， d 表示日， y 取年的末两位，比如 2019 年 12 月 20 日就写成 12/20/19。若 $m+d+y$ 为偶数，并且 m 、 d 、 y 的最大公因数可以表示为 2^n （其中 n 为自然数，注意： $2^0=1$ ），则称这一天为“坏天”。

(1) 问：2021 年 4 月 7 日是不是“坏天”？为什么？

(2) 从 2017 年 1 月 1 日到 2021 年 12 月 31 日（包含这两天），一共有多少天“坏天”？（注意：2020 年 2 月有 29 天）