

2020 年“思维 100”STEM 数学应用能力训练活动（秋季） 八年级（数学应用能力部分）

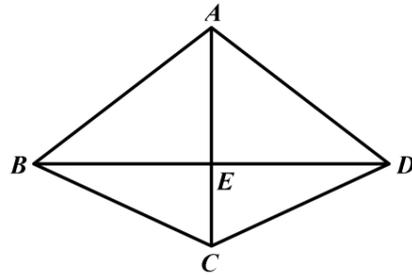
学校_____ 姓名_____ 活动券编号_____

题型	一	二	总分
得分			

一、填空题（本大题共 9 小题，每题 10 分，共 90 分）

1. 在平面直角坐标系中，点 A 、 B 的坐标为 $A(a, a^2)$ 、 $B(b, b^2)$ ，其中 a 、 b 为正整数。若直线 AB 的斜率为 2020，这样的有序数对 (a, b) 有_____对。

2. 如右图， $\begin{cases} AB = AD = 15 \\ BC = DC = 13 \\ AC = 14 \end{cases}$ ，连接 BD ，则 $BD =$ _____。



3. 若 $4^3 = \sqrt{x^4 \cdot \sqrt{4^x}}$ ，则正数 $x =$ _____。

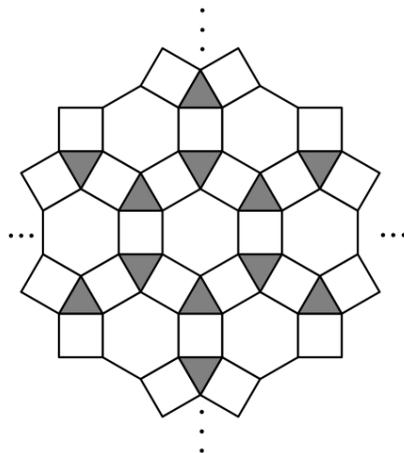
4. 若关于 x 的方程 $x^3 - ax^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 有且仅有一个实数解，则实数 a 的取值范围是_____。

5. $ABCD$ 是面积为 325 的正方形（ AC 是其对角线），点 A 的坐标为 $A(11, 5)$ ，点 B 、 C 、 D 都是格点（格点就是指横、纵坐标都是整数的点），且点 B 在第一象限。满足要求的点 B 坐标有_____个。

6. 定义 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，其中 a 、 b 都是小于 1000 的正整数。若关于 x 的方程 $f(x+1) = 0$ 和 $f(x) + 1 = 0$ 至少有一个公共根，满足要求的有序数对 (a, b) 有_____对。

7. 如右图，用正三角形、正方形、正六边形按下图将无限平面铺

满，则 $\frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{总}}} =$ _____。



8. 若正整数 a 、 b 满足 $\gcd(2019!, 2020!, a, b) \cdot \text{lcm}(2019!, 2020!, a, b) = \sqrt{ab \cdot 2019! \cdot 2020!}$ ，则 $a + b$ 的最小值为_____（ $\gcd(a, b)$ 表示 a 、 b 的最大公因数， $\text{lcm}(a, b)$ 表示 a 、 b 的最小公倍数）。

9. 若正数 x 、 y 、 z 满足 $x + y + z = 1399$ ，则 $[x]y + [y]z + [z]x$ 的最大值为_____（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，比如 $[4.3] = 4$ ， $[3] = 3$ ）。

二、解答题（本大题共 3 小题，每题 20 分，共 60 分，请写出解题过程）

10. 若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} (x+1)(y+1) = 4p+2 \\ x+y = p \end{cases}$ 有实数解，求： p 的取值范围。

（请继续完成反面内容）

11. 若 p 为素数, a, b, c, n 都是正整数, 满足
$$\begin{cases} p > a \\ p > b \\ p > c \end{cases}, \begin{cases} p^2 \mid a + (n-1)b \\ p^2 \mid b + (n-1)c \\ p^2 \mid c + (n-1)a \end{cases},$$
 求证: n 为合数。

12. 如图, 圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 点 M 是圆 I 在 AC 上的切点。点 D 在 AC 上, 满足 $BD = BA$ 。圆 J 是 $\triangle DBC$ 的内切圆, 点 E, F 是圆 J 在 DC, DB 上的切点。连接 EF 交 DI 于点 K , 求证: 点 K 是 DI 的中点。

