2020年“思维100”STEM数学应用能力训练活动

八年级模拟练习

一、填空题（本大题共9小题，每题10分，共90分）

1. 方程$\sqrt{1+\sqrt{1+a}}=\sqrt[3]{a}$的实数解为______。

【答案】$a=8$

【解答】考虑到$\sqrt{1+\sqrt{1+a}}=\sqrt[3]{a}\Rightarrow\left(1+\sqrt{1+a}\right)^3=a^2$，

令$\sqrt{1+a}=k\left(k\geq 0\right)$，则$a=k^2-1$，代入$\left(1+\sqrt{1+a}\right)^3=a^2$，得

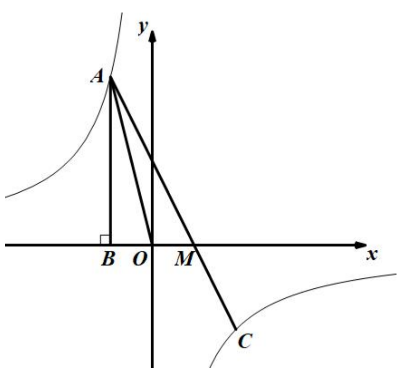
$\left(1+k\right)^3=\left(k^2-1\right)^2\Rightarrow k^3+3k^2+3k+1=k^4-2k^2+1\Rightarrow k^4-k^3-5k^2-3k=0$ 。

因式分解得$k^4-k^3-5k^2-3k=k\left(k^3-k^2-5k-3\right)=k\left(k-3\right)\left(k+1\right)^2$，所以

$k\left(k-3\right)\left(k+1\right)^2=0\Rightarrow k=0$ 或 3，此时$a=k^2-1=-1$ 或 8。

经检验，$a=8$满足要求。

2. 如图，反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过第二象限内的点$A\left(-1,m\right)$，$AB\perp x$轴于点B，ΔAOB的面积为2。若直线$y=ax+b$经过点A，并且经过反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象上另一点$C\left(n,-2\right)$，设直线$y=ax+b$与x轴交于点M，则AM的长度为______。



【答案】$2\sqrt{5}$

【解答】利用$\begin{cases}S_{\Delta AOB}=2\\BO=1\end{cases}$，容易推出$AB=4$，所以$A\left(-1,4\right)$。

由于点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 上，所以 $k=-4$，从而推出 $C(2,-2)$。

利用 $A(-1,4)$、$C(2,-2)$，可以求出直线 AC 的解析式为 $y-4=-2(x+1)\Leftrightarrow y=-2x+2$，从而推出 $M(1,0)$，所以 $AM=2\sqrt{5}$。

3. 满足 $\operatorname{lcm}(n,2020!)=2021!$（$\operatorname{lcm}(n,2020!)$ 表示 n 和 $2020!$ 的最小公倍数）的正整数 n 的最小值记为 N，则 N 的正因数个数有______个。

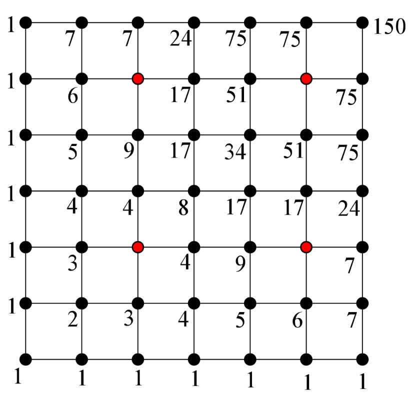
【答案】2156

【解答】考虑到 $2021=43\times 47$，而 $\begin{cases} v_{43}(2020!)=\left[\frac{2020}{43}\right]+\left[\frac{2020}{43^2}\right]=46+1=47 \\ v_{47}(2020!)=\left[\frac{2020}{47}\right]=42 \end{cases}$，所以 N 的最小值为 $43^{48}\times 47^{43}$，从而推出 $\tau(N)=49\times 44=2156$。

4. 一开始小蚂蚁在平面直角坐标系中的点 $(1,1)$ 处，每次移动小蚂蚁可以从点 (x,y) 处走到点 $(x+1,y)$ 或者点 $(x,y+1)$ 处，但是小蚂蚁不愿意走到横、纵坐标都是 3 的倍数的点。小蚂蚁的目的地是点 $(7,7)$，不同的走法有______种。

【答案】150

【解答】直接标数，如下图所示。



5. 若 $\overline{abcd}$ 是一个四位数，满足 $\sqrt{\overline{abcd}}=3(a+b+c+d)$，则 $\overline{abcd}=$______。

【答案】2916

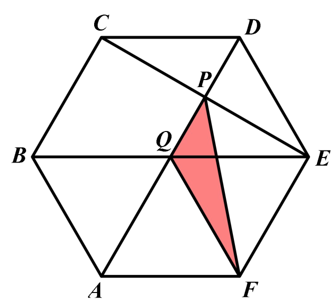
【解答】容易推出 $\sqrt{\overline{abcd}}=3(a+b+c+d)\Rightarrow \overline{abcd}=9(a+b+c+d)^2$。

由于等号右边是 9 的倍数，所以$9|\overline{abcd}\Rightarrow 9|a+b+c+d$，从而推出$9(a+b+c+d)^2$是$9^3=729$的倍数。

令$a+b+c+d=9k\ (k=1,2,3,4)$，则$\overline{abcd}=9(a+b+c+d)^2=729k^2$。为了使其为四位数，则$k=2$或 3，此时$\overline{abcd}=729\times 2^2=2916$或$729\times 3^2=6561$。

分别代入$\sqrt{\overline{abcd}}=3(a+b+c+d)$进行检验，只有 2916 满足要求。

6. 如图，$ABCDEF$是边长为 3 的正六边形，连接CE、AD交于点P，连接BE交AD于点Q，则ΔFPQ的面积为______。



【答案】$\frac{9\sqrt{3}}{8}$

【解答】容易推出点Q为正六边形的中心，可以证明$QCDE$为平行四边形，所以$S_{\Delta QPE}=\frac{1}{4}S_{QCDE}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}S_{ABCDEF}=\frac{1}{12}S_{ABCDEF}$。

利用$AD//EF$，我们推出$S_{\Delta FPQ}=S_{\Delta QPE}=\frac{1}{12}S_{ABCDEF}=\frac{1}{2}S_{\Delta QAB}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2=\frac{9\sqrt{3}}{8}$。

7. 在平面直角坐标系中，$M(-3,1)$、$N(a,b)$、$P(c,d)$是三个不同的点，若$MN\perp NP$，并且$a+b=c+d$，则$b-a=$______。

【答案】4

【解答】先讨论$MN//x$轴、$MN//y$轴的情况，简单画图分析一下可以推出，此时点N、P重合，与题意矛盾。

至此，我们推出$MN\perp NP\Rightarrow k_{MN}\cdot k_{NP}=-1\Rightarrow\frac{b-1}{a+3}\cdot\frac{d-b}{c-a}=-1$。

利用 $a+b=c+d$ 我们推出 $d-b=-(c-a)$，所以 $\dfrac{d-b}{c-a}=-1$，代入 $\dfrac{b-1}{a+3}\cdot\dfrac{d-b}{c-a}=-1$，推出 $\dfrac{b-1}{a+3}=1\Rightarrow b-a=4$。

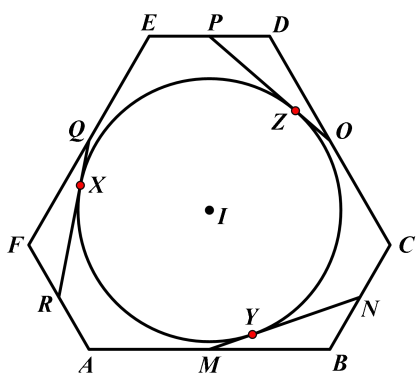
8. 方程 $\left|\left|\left|\left|\sqrt{x^2}-2\right|+2\right|-1\right|+1\right|=2$ 的实数解为________。

【答案】$x_1=2$、$x_2=-2$

【解答】容易推出

$\left|\left|\left|\left|\sqrt{x^2}-2\right|+2\right|-1\right|+1\right|=\left|\left|\left(\left|\sqrt{x^2}-1\right|+2\right)-1\right|+1\right|=\left|\left|\left|\sqrt{x^2}-2\right|+1\right|+1\right|=\left|\sqrt{x^2}-2\right|+2=\left||x|-2\right|+2$，所以 $\left||x|-2\right|+2=2\Rightarrow |x|=2\Rightarrow x=\pm 2$。

9. 如图，凸六边形 $ABCDEF$ 的所有内角都是$120°$，$\begin{cases}AB=CD=EF=28\\BC=DE=FA=14\end{cases}$，点 M、N、O、P、Q、R 分别是 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的中点。有一个圆分别与 QR、MN、OP 切于点 X、Y、Z，这个圆的半径长度为______。



【答案】$\dfrac{10\sqrt{21}}{3}$

【解答】容易推出 ΔACE 是正三角形，结合中位线的性质，我们推出 ΔGHJ 是正三角形，只要求出其边长，就能求出其内切圆的半径了。

考虑到 $\begin{cases}AR=7\\\angle RAM=120°\\AM=14\end{cases}$，我们推出 $RM=7\sqrt{7}$。

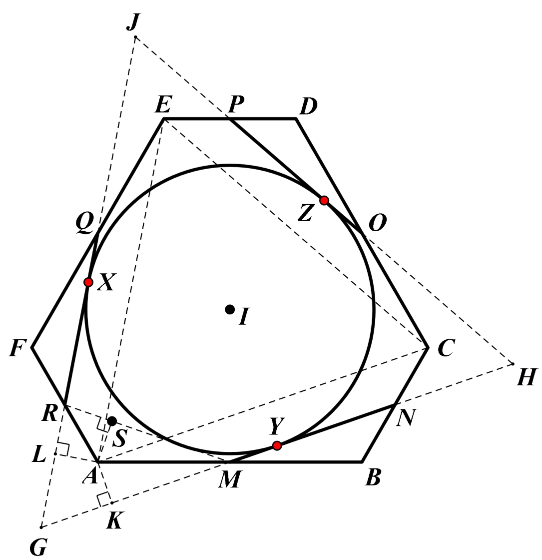
不难推出 $\Delta ARM \cong \Delta FRQ \cong \Delta BNM$，所以 $\begin{cases}\angle AMR = \angle BMN = \angle AMG \\ \angle ARM = \angle FRQ = \angle ARG\end{cases}$，从而推出点 A 是 ΔRGM 的内心。

作 $AL \perp RG$、$AS \perp RM$、$AK \perp GM$。

利用 ΔARM，可以求出 $AL = AK = AS = \sqrt{21}$，$RS = RL = 2\sqrt{7}$，$MS = MK = 5\sqrt{7}$。

利用 $AL = AK = \sqrt{21}$ 可以求出 $GL = GK = 3\sqrt{7}$。

所以 $\begin{cases}GR = 5\sqrt{7} \\ GM = 8\sqrt{7}\end{cases}$，从而推出正 ΔGHJ 的边长为 $20\sqrt{7}$，所以内切圆半径为 $\frac{10\sqrt{21}}{3}$。



二、解答题（本大题共 3 小题，每题 20 分，共 60 分）

10. 若实数 a、b、c、d 满足 $\begin{cases}a + b + c = 0 \\ ad^2 + bd - b = 0 \\ a > b > c\end{cases}$，求：$d$ 的取值范围。

【答案】$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < d < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【解答】考虑到 $ad^2 + bd - b = 0 \Rightarrow ad^2 = b(1-d)$。

如果 $d = 0$，代入 $ad^2 = b(1-d)$ 推出 $b = 0$，可以取 $\begin{cases}a = 1 \\ c = -1\end{cases}$，满足要求。

如果$d\neq 0$，此时$b=0$会导致$a=0$，与$a>b$矛盾，所以$b\neq 0$。从而推出$ad^2=b\left(1-d\right)\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1-d}{d^2}$。

利用$\begin{cases}a+b+c=0\\a>b>c\end{cases}$，可以令$\begin{cases}a-b=m\\b-c=n\end{cases}\left(m,n>0\right)$，则$\begin{cases}a=b+m=c+m+n\\b=c+n\end{cases}$，代入

$a+b+c=0$，推出$\left(c+m+n\right)+\left(c+n\right)+c=0\Rightarrow c=-\frac{m+2n}{3}$。所以$\begin{cases}a=c+m+n=\frac{2m+n}{3}\\b=c+n=\frac{n-m}{3}\end{cases}$，

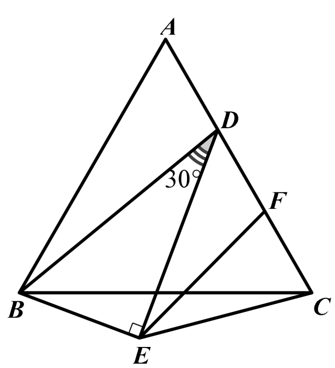
从而推出$\frac{a}{b}=\frac{2m+n}{n-m}=1+\frac{3m}{n-m}=1+\frac{3}{\frac{n}{m}-1}$。

考虑到$\frac{n}{m}>0\Rightarrow \frac{n}{m}-1>-1$，所以$\frac{3}{\frac{n}{m}-1}<-3$或$\frac{3}{\frac{n}{m}-1}>0$，从而推出$\frac{a}{b}<-2$或$\frac{a}{b}>1$。

至此，我们得到不等式$\frac{1-d}{d^2}<-2\Rightarrow 2d^2-d+1<0\Rightarrow 2\left(d-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}<0$（无法成立，舍），或$\frac{1-d}{d^2}>1\Rightarrow d^2+d-1<0\Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2}<d<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

综上所述，答案为$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<d<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

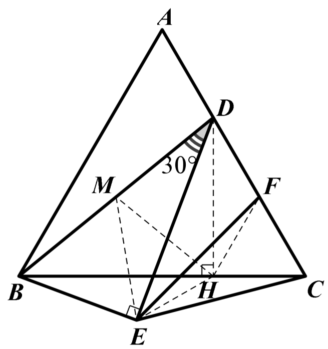
11. 如图，在正ΔABC中，点D为AC上一点，作$Rt\Delta DBE$，$\angle DEB=90°$，$\angle BDE=30°$，点F为CD中点。求证：$EF=EC$。



【证明】作$DH\perp BC$，连接HF，容易推出ΔFHC为正三角形，所以$\begin{cases}HF=HC\\HE=HE\end{cases}$。

其次，取 DB 中点 M，连接 ME、MH，从而推出 $MH=\frac{1}{2}BD=ME$。结合 $MB=ME=MH$，从而推出 $\angle BHE=\frac{1}{2}\angle BME=30^\circ\Rightarrow\angle CHE=150^\circ\Rightarrow\angle FHE=150^\circ$，所以 $\angle FHE=\angle CHE$。

结合 $\begin{cases}HF=HC\\ \angle FHE=\angle CHE\\ HE=HE\end{cases}$，我们推出 $\Delta FHE\cong\Delta CHE$，所以 $EF=EC$。



12. 若 n 为正整数，$3n+1$、$10n+1$ 都是完全平方数，求证：$29n+11$ 不可能是素数。

【证明】假设 $29n+11$ 为素数，接下来找矛盾。

由于 $3n+1$ 和 $10n+1$ 都是完全平方数，所以 $(3n+1)(10n+1)=30n^2+13n+1=n(29n+11)+(n^2+2n+1)=n(29n+11)+(n+1)^2$ 是完全平方数。

令 $\begin{cases}3n+1=a^2\\10n+1=b^2\end{cases}(a,b\in Z^+)$，则

$a^2b^2=n(29n+11)+(n+1)^2\Rightarrow(ab+n+1)(ab-n-1)=n(29n+11)$。

由于 $29n+11$ 为素数，所以等式 $(ab+n+1)(ab-n-1)=n(29n+11)$ 推出 $29n+11\mid ab+n+1$ 或 $29n+11\mid ab-n-1$。

如果 $29n+11\mid ab+n+1$，则 $29n+11\le ab+n+1\Rightarrow ab\ge 28n+10$。

如果 $29n+11\mid ab-n-1$，容易推出 $ab-n-1$ 也是正整数，所以 $29n+11\le ab-n-1\Rightarrow ab\ge 30n+12$。

无论哪种情况，我们都能推出$ab \geq 28n+10$。两边平方后得
$a^2b^2 \geq (28n+10)^2 = 784n^2+560n+100$。

将$\begin{cases} 3n+1=a^2 \\ 10n+1=b^2 \end{cases} (a,b \in Z^+)$代入，从而推出

$(3n+1)(10n+1) \geq 784n^2+560n+100 \Rightarrow 30n^2+13n+1 \geq 784n^2+560n+100$，在$n \in Z^+$这个前提下，这个不等式不可能成立。

综上，假设不成立，$29n+11$不可能是素数。