2020年“思维100”STEM数学应用能力训练活动

七年级模拟练习

一、填空题（本大题共9小题，每题10分，共90分）

1. 分解因式：$(a+b)^2(ab-1)+1=$______。

【答案】$\left(a^2+ab-1\right)\left(b^2+ab-1\right)$

【解答1】

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2(ab-1)+1\\
&=\left(a^2+2ab+b^2\right)(ab-1)+1\\
&=b\cdot a^3+\left(2b^2-1\right)a^2+\left(b^3-2b\right)a-b^2+1\\
&=b\cdot a^3+\left(2b^2-1\right)a^2+\left(b^3-2b\right)a-(b+1)(b-1)
\end{aligned}
$$

利用主元因式定理，将$a=-\dfrac{b^2-1}{b}$代入，代数式的值为0，所以它有因式b^2+ab-1，接下来长除即可。

【解答2】

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2(ab-1)+1\\
&=ab(a+b)^2-(a+b)^2+1\\
&=\left[a(a+b)-1\right]\left[b(a+b)-1\right]\\
&=\left(a^2+ab-1\right)\left(b^2+ab-1\right)
\end{aligned}
$$

2. 方程$2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1$的实数解为______。

【答案】$x_1=\dfrac{1}{2}$、$x_2=2$

【解答】令$x+\dfrac{1}{x}=a$，则原方程化为

$2\left(a^2-2\right)-3a=1\Rightarrow 2a^2-3a-5=0\Rightarrow(2a-5)(a+1)=0$，所以$a=-1$或$\dfrac{5}{2}$。

如果$a=-1$，则$x+\dfrac{1}{x}=-1\Rightarrow x^2+x+1=0\Rightarrow\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，显然不可能。

如果$a=\frac{5}{2}$，则$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2x^2-5x+2=0\Rightarrow(2x-1)(x-2)=0$，所以$x_1=\frac{1}{2}$、$x_2=2$。

3. 若N为正整数，$\frac{N+2}{3N^2+7}$不是最简分数，则N的最小值为______。

【答案】17

【解答】为了使其不是最简分数，则$\gcd\left(3N^2+7,N+2\right)=\gcd\left(N+2,19\right)>1$，从而推出$19\mid N+2$，$N$的最小值为17。

4. 若完全平方数n^2可以表示为11个连续整数的平方之和，则$|n|$的最小值为______。

【答案】11

【解答】假设这11个连续整数为$x-5$、$x-4$、$\cdots$、$x-1$、x、$x+1$、$\cdots$、$x+5$，从而推出$n^2=(x-5)^2+(x-4)^2+\cdots+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+5)^2$。

不难算出$(x-5)^2+(x-4)^2+\cdots+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+5)^2=11\left(x^2+10\right)$，所以$n^2=11\left(x^2+10\right)$。

至此，我们推出n是11的倍数，所以$|n|$理论上的最小值为11。

当$x=1$时，可以使得$|n|=11$

5. 若三位数$\overline{abc}$能被5整除，但不能被6、7整除；三位数$\overline{cba}$能被6整除，但不能被5、7整除；三位数$\overline{cab}$能被7整除，但不能被5、6整除，则$\overline{abc}=$______。

【答案】675

【解答】由于$5\mid\overline{abc}$，而且$c\neq0$，所以$c=5$。

根据题意，a、b、c互不相等。

由于$\overline{cba}$是6的倍数，所以$\begin{cases}3\mid c+b+a\\2\mid a\end{cases}$。而$\overline{cab}$不是6的倍数，所以$b$为奇数（如果$b$为偶数，结合$3\mid c+b+a$，从而推出$\overline{cab}$一定是6的倍数）。

接下来开始枚举：

如果$a=2$，结合$3\mid c+b+a$以及b为奇数，可以推出$b=5$。这会导致$b=c$，不符合要求。

如果$a=4$，结合$3|c+b+a$以及b为奇数，可以推出$b=3$或 9。此时$\overline{cab}=543$或 549 都不是 7 的倍数，不符合要求。

如果$a=6$，结合$3|c+b+a$以及b为奇数，可以推出$b=1$或 7。此时$\overline{cab}=561$或 567，其中 567 是 7 的倍数。接下来检验一下，$\overline{abc}=675$符合所有的要求。

如果$a=8$，结合$3|c+b+a$以及b为奇数，可以推出$b=5$，。这会导致$b=c$，不符合要求。

综上所述，答案为 675。

6. 对任意整数x、y，定义$x \triangleright y=x+y-xy$，则使得$(x \triangleright y) \triangleright z+(x \triangleright z) \triangleright y+(y \triangleright z) \triangleright x=0$的整数对$(x,y,z)$有______对。

【答案】4

【解答】容易推出

$(x \triangleright y) \triangleright z=(x+y-xy) \triangleright z=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z=x+y+z-(xy+yz+zx)+xyz$

同理推出$(x \triangleright z) \triangleright y=(y \triangleright z) \triangleright x=x+y+z-(xy+yz+zx)+xyz$，代入

$(x \triangleright y) \triangleright z+(x \triangleright z) \triangleright y+(y \triangleright z) \triangleright x=0$得

$x+y+z-(xy+yz+zx)+xyz=0 \Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1)=-1$，可能的情况有

$\begin{cases}x-1=-1\\y-1=-1\\z-1=-1\end{cases}$、$\begin{cases}x-1=-1\\y-1=1\\z-1=1\end{cases}$、$\begin{cases}x-1=1\\y-1=-1\\z-1=1\end{cases}$、$\begin{cases}x-1=1\\y-1=1\\z-1=-1\end{cases}$，共 4 对解。

7. 小明将 216 的所有正因数写出来：1、2、3、…、216，从中依次选出 3 个正因数（可以重复选，比如选出 3 个 1）。若这 3 个正因数的乘积依然是 216 的因数，不同的选法有______种（依次选出 1、1、3 和依次选出 1、3、1 算两种不同的选法）。

【答案】400

【解答】考虑到$216=2^3\times3^3$，所以 216 一共有 16 个正因数，每一个正因数都可以表示为$2^a\times3^b$。

不妨设这三个挑出的正因数为$2^{a_1}\times3^{b_1}$、$2^{a_2}\times3^{b_2}$、$2^{a_3}\times3^{b_3}$，从而推出$\begin{cases}a_1+a_2+a_3\le3\\b_1+b_2+b_3\le3\end{cases}$。

接下来标准的隔板法不等式处理，令

$a_1+a_2+a_3+m=3 \Rightarrow (a_1+1)+(a_2+1)+(a_3+1)+(m+1)=7$，一共有 $C_6^3=20$ 对解。

同理，$b_1+b_2+b_3 \le 3$ 也会得到 20 对解，所以一共得到 400 种选法。

8. 若 n 为正整数，$\dfrac{1!\times 2!\times 3!\times \cdots \times 2020!}{n!}$ 是完全平方数，则 $n=$______。

【答案】1010

【解答】考虑到 $\begin{cases} 1!\times 2!=(1!)^2\times 2 \\ 3!\times 4!=(3!)^2\times 4 \\ 5!\times 6!=(5!)^2\times 6 \\ \cdots \\ 2019!\times 2020!=(2019!)^2\times 2020 \end{cases}$，所以分子 $1!\times 2!\times 3!\times \cdots \times 2020!$ 中的非完全平方数部分为 $2\times 4\times 6\times \cdots \times 2020=2^{1010}\times 1010!$，所以当 $n=1010$ 时，满足要求。

接下来我们要证明，$n=1010$ 是唯一的解。

考虑到 1009 为素数，而且 $1010!$ 中有一个 1009（也就是说必须除掉一个 1009，才能满足要求），所以 $n\ge 1009$。

而下一个素数为 1013，如果 $1013\le n<2026$，则 $n!$ 中包含 1 个 1013。由于 $N=\dfrac{1!\times 2!\times 3!\times \cdots \times 2020!}{1010!}$ 是完全平方数，从而推出 1013 在 N 中的指数为偶数，一旦除掉一个，就变成奇数了，不可能是完全平方数。

考虑到 2027 也是素数，所以当 $n\ge 2027$ 时，$\dfrac{1!\times 2!\times 3!\times \cdots \times 2020!}{n!}$ 不是正整数，从而推出 $1009\le n\le 1012$ 或 $n=2026$。分别检验一下，只有 $n=1010$ 这个唯一解。

9. 若 $\tau(N)=60$，其中 N 为正整数，$\tau(N)$ 表示 N 的正因数个数，则 $\tau(N^2)$ 的最大值为______。

【答案】405

【解答】考虑到 $60=2^2\times 3\times 5$，所以 N 最多有 4 个不同的素因数，此时 $N=pqr^2s^4$。

假设 $N=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$，从而推出 $\tau(N)=(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1)=60$，我们要求 $\tau(N^2)=(2r_1+1)(2r_2+1)\cdots(2r_k+1)$ 的最大值。

将$\begin{cases}\tau(N)=(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1)=60\\ \tau(N^2)=(2r_1+1)(2r_2+1)\cdots(2r_k+1)\end{cases}$作一个除法，从而推出

$\dfrac{\tau(N^2)}{60}=\dfrac{2r_1+1}{r_1+1}\times\dfrac{2r_2+1}{r_2+1}\times\cdots\times\dfrac{2r_k+1}{r_k+1}=\left(2-\dfrac{1}{r_1+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_2+1}\right)\cdots\left(2-\dfrac{1}{r_k+1}\right)$，所以

$\tau(N^2)=60\left(2-\dfrac{1}{r_1+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_2+1}\right)\cdots\left(2-\dfrac{1}{r_k+1}\right)$。

接下来，只要求出$\left(2-\dfrac{1}{r_1+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_2+1}\right)\cdots\left(2-\dfrac{1}{r_k+1}\right)$的最大值，问题就解决了。

如果N有四个素因数，则$(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)(r_4+1)=60\Rightarrow r_1+1$、$r_2+1$、$r_3+1$、$r_4+1$必须为2、2、3、5，此时

$\left(2-\dfrac{1}{r_1+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_2+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_3+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_4+1}\right)=\left(2-\dfrac{1}{1+1}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{1+1}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{2+1}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{4+1}\right)=\dfrac{27}{4}$。

如果N有三个素因数，则$(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)=60$，此时$\left(2-\dfrac{1}{r_1+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_2+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_3+1}\right)$的值可能是$\left(2-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{15}\right)$、$\left(2-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{5}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{6}\right)$、$\left(2-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{10}\right)$、$\left(2-\dfrac{1}{4}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{5}\right)$，检验一下，都小于$\dfrac{27}{4}$。

如果N有两个素因数，则$(r_1+1)(r_2+1)=60$，此时$\left(2-\dfrac{1}{r_1+1}\right)\left(2-\dfrac{1}{r_2+1}\right)<2\times2=4<\dfrac{27}{4}$。

如果N有一个素因数，则$r_1+1=60$，此时$2-\dfrac{1}{r_1+1}=2-\dfrac{1}{60}<\dfrac{27}{4}$。

综上所述，$\left(2-\dfrac{1}{r_1+1}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{r_2+1}\right)\times\cdots\times\left(2-\dfrac{1}{r_k+1}\right)$的最大值为$\dfrac{27}{4}$，答案为$60\times\dfrac{27}{4}=405$。

二、解答题（本大题共3小题，每题20分，共60分）

10. 一项工程甲单独做a天完成，乙单独做b天完成，其中a和b都为正整数。如果两个人同时做7天也可以完成这项工程，求：满足条件的a、b共有多少种可能情况。

【答案】3

【解答】设工作总量为 1，则甲的工作效率为$\frac{1}{a}$，乙的工作效率$\frac{1}{b}$，那么根据题意可以知道，$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=7\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{7}\Rightarrow7(a+b)=ab\Rightarrow(a-7)(b-7)=49$ 。

显然a、b都大于 7，可能的情况有$\begin{cases}a-7=1\\b-7=49\end{cases}$、$\begin{cases}a-7=7\\b-7=7\end{cases}$或$\begin{cases}a-7=49\\b-7=1\end{cases}$，共 3 种情况。

11. 若$\overline{AB}$、$\overline{CD}$都是两位数，$\left(\overline{AB}\times\overline{CD}\right)|\overline{ABCD}$，求：$\overline{ABC}$的最小值。

【答案】135

【解答】令$\begin{cases}\overline{AB}=x\\\overline{CD}=y\end{cases}$，从而推出$xy|100x+y\Rightarrow x|100x+y\Rightarrow x|y$ 。

令$y=kx\left(k\in Z^{+}\right)$，代入后得$kx^2|100x+kx\Rightarrow kx|100+k\Rightarrow k|100+k\Rightarrow k|100$ ，所以$k=1$、2、4、5、10、20、25、50、100。

由于x、y都是两位数，所以$1\le k\le9$，只能取$k=1$、2、4、5。

如果$k=1$，则$xy|100x+y\Rightarrow x^2|101x\Rightarrow x|101$，显然不可能。

如果$k=2$，则$xy|100x+y\Rightarrow 2x^2|102x\Rightarrow x|51$，此时$x$的最小值为 17，对应的$y=34$，此时$\overline{ABC}$的最小值为 173。

如果$k=4$，则$xy|100x+y\Rightarrow 4x^2|104x\Rightarrow x|26$，此时$x$的最小值为 13，对应的$y=52$，此时$\overline{ABC}$的最小值为 135。

如果$k=5$，则$xy|100x+y\Rightarrow 5x^2|105x\Rightarrow x|21$，此时$x$的最小值为 21，对应的$y=105$，不是两位数，不符合要求，舍去。

综上所述，答案为 135。

12. 若正数x、y、z满足$x+y+z=3$，求证：

（1）$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge2$；

（2）$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge3$；

（3）$x(x+y-z)$、$y(y+z-x)$、$z(z+x-y)$中至少有一个数小于等于 1。

【证明】（1）$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$，所以$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$。

（2）考虑到

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 3+2+2+2=9，$$

而$x+y+z=3$，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3$。

（3）假设结论不成立，则$x(x+y-z)>1\Rightarrow \frac{1}{x}<x+y-z=x+y+z-2z=3-2z$。

同理推出，$\frac{1}{y}<3-2x$、$\frac{1}{z}<3-2y$。

将$\frac{1}{x}<3-2z$、$\frac{1}{y}<3-2x$、$\frac{1}{z}<3-2y$通加后得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<9-2(x+y+z)=3$，与第 2 小问的结论矛盾，得证。