2020年“思维100”STEM数学应用能力训练活动

六年级模拟练习

一、填空题A（本大题共8小题，每题6分，共48分）

1. 计算：$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}-\frac{1}{32}+\frac{63}{64}=$______。

【答案】$3\frac{1}{64}$（或$\frac{193}{64}$）

【解答】原式$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{8}+1-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+1-\frac{1}{64}=3+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)=3\frac{1}{64}$

2. 在这个3×3的方格表的每一行每一列都必须包含数1、2、3，则$M+N=$______。

1		
	2	N
		M

【答案】4

【解答】略

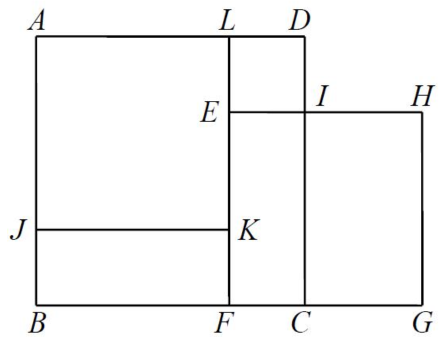
3. 一个小岛上一共住着72个人，其中有一些人一直说真话，一些人一直说假话。有一天，地方派了一个官员到岛上统计说真话和假话的人数，最后他收到这样的反馈：
有61个人说：“岛上有32个说真话的人、40个说假话的人。”
另外的11个人说：“岛上有11个说真话的人、61个说假话的人。”
这个岛上一共有______个说假话的人。

【答案】61

【解答】根据题意，要么是61个人说的是真话，要么是11个人说的是真话。

如果61个人说的是真话，这与他们说的话矛盾，因为他们说“岛上有32个说真话的”，所以这61个说的是假话。

4. 下图中四边形$ABCD$、$EFGH$、$AJKL$都是正方形，其中正方形$AJKL$的面积为2020，长方形$EFCI$、$JBFK$的面积都是1360。则长方形$CGHI$的面积为______。



【答案】660

【解答】容易推出 $DL=AD-AL=AB-AJ=BJ$，而且长方形 $EFCI$ 与长方形 $JBFK$ 的面积相等，从而推出 $EF=JK$，所以 $S_{AJKL}=S_{EFGH}$，从而推出 $S_{CGHI}=2020-1360=660$。

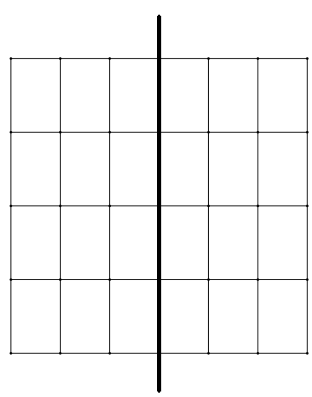
5. 计算：$\frac{1}{7}+\frac{3}{8}+\frac{7}{36}+\frac{29}{56}+\frac{37}{63}+\frac{41}{72}+\frac{53}{77}+\frac{29}{84}+\frac{3}{88}=$ ______。

【答案】$3\frac{5}{11}$（或 $\frac{38}{11}$）

【解答】原式

$$=\frac{1}{7}+\frac{3}{8}+\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{6}{11}\right)+\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)=3\frac{5}{11}$$

6. 如图，24 个小长方形拼成一个大长方形。在粗实线左侧选 4 个小长方形染黑，在粗实线右侧也选 4 个小长方形染黑，然后将整个大长方形沿着粗实线折叠。要求折叠后只有一对黑色小长方形重合，则不同的染色方案有______种。



【答案】110880

【解答】先从左边 12 个小长方形中任意选出 4 个小长方形进行染色，得到 C_{12}^4 种染色方案。

接下来这 4 个小长方形的对称长方形有 4 个（都在右侧），选出其中 1 个将其染色，得到 C_4^1 种选法。

剩下的从右边剩下的 8 个小长方形中选出 3 个，进行染色，得到 C_8^3 种选法。

综上所述，答案为 $C_{12}^4 \times C_4^1 \times C_8^3 = 495 \times 4 \times 56 = 110880$ 。

7. 甲、乙两个小朋友玩游戏，他们最开始都有一定数量的游戏币。游戏规则如下：输的一方要把自己当前游戏币的一半给赢的一方。游戏一共进行了三轮，甲的输赢情况分别是：输、赢、输，结果最后乙的游戏币数量是甲的两倍。则一开始甲、乙两人游戏币的数量比为________（结果写成比例形式）。

【答案】2:1

【解答】设甲、乙一开始游戏币的数量分别为 x 和 y，则第一轮后甲、乙的游戏币数量变为 $\frac{x}{2}$ 和 $y+\frac{x}{2}$，第二轮后甲、乙的游戏币数量变为 $\frac{3x+2y}{4}$ 和 $\frac{x+2y}{4}$，第三轮后甲、乙的“游戏币”数量变为 $\frac{3x+2y}{8}$ 和 $\frac{5x+6y}{8}$。根据题意，应有 $\frac{5x+6y}{8} = 2 \cdot \frac{3x+2y}{8}$，化简得 $x=2y$，因此 $x:y=2:1$。

8. 甲、乙两人玩游戏，规则如下：两个人手中分别比划出一个 0 到 5 之间（包含 0、5）的数字，同时喊出一个 0 到 10 之间的数字，如果喊出的数字等于两人手上比划出数字的和或差，则胜利，如果两人都符合胜利的条件，则算平局。已知某一轮乙即将比划的数字是 1，喊的数字是 3，那么甲能取得胜利的情况有______种。

【答案】7

【解答】注意到甲不能出 2 或 4，否则最多只能平局。如果考虑甲通过猜中数字和取胜，出的数和喊的数的情况有 $(0,1)$、$(1,2)$、$(3,4)$、$(5,6)$ 这 4 种；如果考虑甲通过猜中数字差取胜，出的数和喊的数的情况有 $(0,1)$、$(1,0)$、$(3,2)$、$(5,4)$ 这 4 种。其中 $(0,1)$ 的情况重复，所以甲取胜的情况一共有 7 种。

二、填空题 B（本大题共 5 小题，每题 8 分，共 40 分）

9. 如果一个四位数能被 45 整除，并且其所有数码都是奇数，这样的四位数称为“好数”。我们用 M 表示最大的“好数”，m 表示最小的“好数”，则 $\frac{M-m}{45}=$______。

【答案】176

【解答】假设这个四位数为 $\overline{abcd}$，其中 a、b、c、d 都是奇数码。

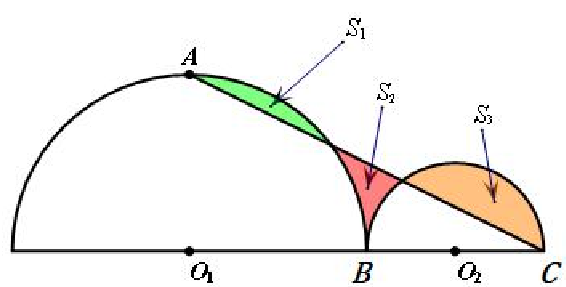
考虑到 $45\mid\overline{abcd}\Rightarrow\begin{cases}5\mid\overline{abcd}\\9\mid\overline{abcd}\end{cases}$，其中 $5\mid\overline{abcd}\Rightarrow d=5$，接下来只要满足 $9\mid\overline{abcd}$ 即可。考虑到 $a+b+c+5$ 为偶数，而且 $d=5$，只能是 $a+b+c+5=18\Rightarrow a+b+c=13$。

为了求出最大值，尝试 $a=9$，此时最大值为 $M=9315$

为了求出最小值，尝试 $a=1$，此时最小值为 $m=1395$

所以 $\frac{M-m}{45}=\frac{9315-1395}{45}=176$。

10. 如图所示，半径分别为 2、1 的两个半圆拼接在一起，圆心分别为 O_1、O_2，A 是大圆弧上的中点，连接 A、C。设如图所示的三个阴影部分的面积分别为 S_1,S_2,S_3，则 $S_1-S_2+S_3=$______（结果保留 π）。



【答案】$\frac{3\pi}{2}-4$

【解答】观察图形可知，$S_1+S_3+S_{\triangle AO_1C}=S_2+S_{扇形AO_1B}+S_{半圆BO_2C}$，从而推出

$S_1-S_2+S_3=\frac{1}{4}\pi\times2^2+\frac{1}{2}\pi\times1^2-\frac{1}{2}\times2\times4=\frac{3}{2}\pi-4$。

11. 小明的花园中有 15 朵郁金香、16 朵玫瑰、23 朵向日葵。小明想摘一些花作一个花束，要求花束中郁金香的数量少于玫瑰的数量，玫瑰的数量少于向日葵的数量。满足要求的花束有________种。

【答案】1632

【解答】假设花束中有a朵郁金香、b朵玫瑰、c朵向日葵，则$0\le a<b<c\le 23$，要求有多少个满足要求的有序数对(a,b,c)。

一旦b选定后，a可以选0、1、2、…、$b-1$中的任意数（有b个选法），而c可以选$b+1$、$b+2$、…、23中的任意数（有$23-b$个选法），所以得到$b(23-b)=23b-b^2$个选法，对应$23b-b^2$个有序数对。

而b可以从1、2、3、…、16中进行选取，所以答案为

$$\begin{aligned}&\left(23\times1-1^2\right)+\left(23\times2-2^2\right)+\cdots+\left(23\times16-16^2\right)\\&=23\times(1+2+3+\cdots+16)-\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+16^2\right)\\&=23\times136-1496\\&=1632\end{aligned}$$

12. 我们用$\tau(N)$表示正整数N的正因数个数，满足$\tau\left[\tau\left(N^2\right)\right]=4$的正整数$N$的最小值为______。

【答案】12

【解答】为了满足$\tau\left[\tau\left(N^2\right)\right]=4$，则$\tau\left(N^2\right)=p^3$或$pq$，其中$p$、$q$是不同的素因数。

如果取$\tau\left(N^2\right)=p^3$，由于N^2为完全平方数，所以$\tau\left(N^2\right)$为奇数，从而推出$\tau\left(N^2\right)$的最小值为$3^3=27$，此时N^2的最小值为$2^2\times3^2\times5^2$，所以N的最小值为$2\times3\times5=30$。

如果取$\tau\left(N^2\right)=pq$，由于N^2为完全平方数，所以$\tau\left(N^2\right)$为奇数，从而推出$\tau\left(N^2\right)$的最小值为$3\times5=15$，此时N^2的最小值为$2^4\times3^2$，所以N的最小值为$2^2\times3=12$。

综上所述，N的最小值为12。

13. 如果一个正整数从左读到右，所有数码依次变大或者所有数码依次变小，这样的正整数就称为“好数”，比如7540、24578都是“好数”，而9986不是“好数”。所有除以3余1的“好数”有_______个。

【答案】501

【解答】对于一个所有数码依次变大的满足要求的数，将其反过来写（而且可以选择是否在末尾加上0），就是一个所有数码依次变小的满足要求的数。

假设所有数码依次变大的满足要求的数有 n 个，则所有数码依次变小的满足要求的数有 $2n$ 个，其中 1、4、7 这三个数既能算“所有数码依次变大的满足要求的数”也能算“所有数码依次变小的满足要求的数”，所以答案为 $n+2n-3=3n-3$ 。

接下来我们只考虑所有数码依次变大的满足要求的数。

考虑到 $1+2+3+\cdots+9=45$ ，如果某个数 A 满足所有要求，比如 $A=37$ ，则剩下的数码可以构成一个除以 3 余 2 的所有数码依次变大的数，比如 $A=37 \Rightarrow B=1245689$ ，此时 $B \equiv 2 \pmod{3}$ 。

反之，如果某个数满足“除以 3 余 2”并且“所有数码依次变大”，比如 $B=24578$ ，则剩下的数码可以构成一个满足“除以 3 余 1”并且“所有数码依次变大”的数，比如 $B=24578 \Rightarrow A=1369$ ，此时 $A \equiv 1 \pmod{3}$ 。

所以这两种数的个数相同。

先不考虑除以 3 余 1 这个要求，1、2、…、9 中的每个数都有两种选择：选或不选，一共有 $2^9-1=511$ 个这样的数（不能一个都不选），假设其中一个有 m 个数是 3 的倍数，则 $n=\frac{511-m}{2}$ 。

在 1、2、…、9 中，除以 3 余 1 的有 3 个，除以 3 余 2 的有 3 个，除以 3 余 0 的有 3 个，其中除以 3 余 0 的个数可以任意选，我们用 (a,b) 表示从除以 3 余 1 的数中挑 a 个，从除以 3 余 2 的数中挑 b 个，接下来枚举。

如果 $(a,b)=(0,0)$ ，有 $2^3-1=7$ 个（剩下的 3 个数码 3、6、9 不能都不选）；

如果 $(a,b)=(1,1)$ ，有 $C_3^1 \times C_3^1 \times 2^3=72$ 个；

如果 $(a,b)=(2,2)$ ，有 $C_3^2 \times C_3^2 \times 2^3=72$ 个；

如果 $(a,b)=(3,0)$ ，有 $C_3^3 \times C_3^0 \times 2^3=8$ 个；

如果 $(a,b)=(0,3)$ ，有 $C_3^0 \times C_3^3 \times 2^3=8$ 个；

如果 $(a,b)=(3,3)$ ，有 $C_3^3 \times C_3^3 \times 2^3=8$ 个。

一共有 $7+72+72+8+8+8=175$ 个 3 的倍数，所以 $n=\frac{511-m}{2}=\frac{511-175}{2}=168$ ，答案为 $3n-3=3\times168-3=501$ 。

三、解答题（第 1 小问 4 分，第 2 小问 8 分）

14. 将正整数N的所有正因数从小到大排列，得$1=d_1<d_2<d_3<\cdots<d_k=N$，其中$k\geq 6$。若$\begin{cases}d_3+d_4=d_5+6\\d_4+d_5=d_6+7\end{cases}$。

（1）判定N是奇数还是偶数。

（2）求：N的最小值。

【答案】（1）偶数（2）494

【解答】利用$d_3+d_4=d_5+6$我们推出d_3、d_4、d_5不可能都是奇数，所以 2 一定是N的素因数，也就是说$d_2=2$。

如果d_3、d_4中有一个是 4，比如说$d_3=4$，则$d_3+d_4=d_5+6\Rightarrow d_4=d_5+2$，这与$d_4<d_5$矛盾。所以$d_3$、$d_4$都不是 4，也就是说$N$的素因数分解中 2 的指数为 1。

至此，我们推出d_3是一个奇素数，我们用p来表示这个素数。

如果d_4为偶数，则$d_4=2p$，代入$d_3+d_4=d_5+6$，推出$d_5=3p-6$，所以d_5是 3 的倍数，从而推出$p=3$，此时$\begin{cases}d_4=2p=6\\d_5=3p-6=3\end{cases}$，矛盾。所以$d_4$不能是偶数，也就是说$d_4$是另一个奇素数，我们用$q$表示这个奇素数。

由于$d_3+d_4=d_5+6$，我们推出d_5为偶数，所以$d_5=2p$，代入$d_3+d_4=d_5+6$，推出$p+q=2p+6\Rightarrow q=p+6$。将这些结论代入$d_4+d_5=d_6+7$，推出$q+2p=d_6+7\Rightarrow d_6=2p+q-7$为偶数，所以$d_6=2q$，得$2q=2p+q-7\Rightarrow q=2p-7$。结合$\begin{cases}q=p+6\\q=2p-7\end{cases}$，我们推出$\begin{cases}p=13\\q=19\end{cases}$，此时$N$的最小值为$2\times13\times19=494$。