“中环杯”中小学生思维能力训练活动 思维训练营

七年级 找数字

★ 例题：

如果一个正整数 n(n 由 m 个数码组成)满足下面的性质，这样的 n 就称为“中环数”。

(1) 所有形如 n^{2k+1}(k 为非负整数)的末尾 m 个数字构成的数就是 n；

(2) 所有形如 n^{2k}(k 为正整数)的末尾 m 个数字构成的数都不是 n。

比如：4 就是一个“中环数”，因为 4^1、4^3、4^5…的个位数都是 4，但是 4^2、4^4、4^6…的个位数都是 6。

在小于 1000 的正整数中，“中环数”有_____个。

★ 解析：

首先，我们来看只有一位数的“中环数”，显然只有 4、9 满足要求条件(2 不满足要求，因为 2^3 的个位数不是 2，6 也不满足要求，因为 6^2 的个位数依然是 6)，一共有 2 个一位数的“中环数”。

如果接下去利用位值原理分析，会比较麻烦，这里换一种思路。

显然 n^3-n、n^5-n、n^7-n…的末 m 位都是 0，所以 $10^m|n^3-n \Leftrightarrow 10^m|n(n^2-1)$，$10^m|n^5-n \Leftrightarrow 10^m|n(n^4-1)$，$10^m|n^7-n \Leftrightarrow 10^m|n(n^6-1)$……

通过平方差可知，在这些要求中，只要满足 $10^m|n(n^2-1)$，剩下的条件就都能满足了，所以本题相当于要找到 n，使得 $10^m|n(n^2-1)$。

如果 n 是一个两位数，则 $10^m|n(n^2-1) \Leftrightarrow 10^2|n(n^2-1)$，所以 $\begin{cases}25|(n-1)n(n+1)\\4|(n-1)n(n+1)\end{cases}$。我们先以 $25|(n-1)n(n+1)$ 进行枚举，得 24、25、26、49、50、51、74、75、76、99。其中满足 $4|(n-1)n(n+1)$ 的只剩下 24、25、49、51、75、76、99。

考虑到 25^2 的末两位也是 25，76^2 的末两位也是 76，所以 24、49、51、75、99 就是我们要找的“中环数”，一共有 5 个两位数的“中环数”。

如果 n 是一个三位数，则 $10^m|n(n^2-1) \Leftrightarrow 10^3|n(n^2-1)$，所以 $\begin{cases}125|(n-1)n(n+1)\\8|(n-1)n(n+1)\end{cases}$。我们先以 $125|(n-1)n(n+1)$ 进行枚举，得 124、125、126、249、250、251……接下来将不符合 $8|(n-1)n(n+1)$ 的去除后，发现 376、625 的二次方的末三位依然是 376、625，最后剩下有 11 个三位数的“中环数”。

综上所述，本题的答案为 2+5+11=18。

六年级 计算题

★ 例 1：

若 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{23}=\frac{a}{23!}$ ($23!=1\times2\times\cdots\times23$)，则 a 除以 13 的余数为______。

★ 解析：

容易知道 $a=23!+\frac{23!}{2}+\frac{23!}{3}+\cdots+\frac{23!}{23}$。其中除了 $\frac{23!}{13}$ 以外，别的每一项都是 13 的倍数。所以我们只要计算 $1\times2\times\cdots\times12\times14\times15\times\cdots\times23$ 除以 13 的余数即可。$1\times2\times\cdots\times12\times14\times15\times\cdots\times23 \equiv (1\times2\times\cdots\times12)\times(1\times2\times\cdots\times10) \equiv (1\times2\times\cdots\times10)^2\times11\times12 \equiv [1\times2\times3\times4\times5\times6\times(-6)\times(-5)\times(-4)\times(-3)]^2\times(-2)\times(-1) \equiv 6^2\times2 \equiv 7 \pmod{13}$。

★ 例 2：

计算：$[\frac{2^{100}}{2^{50}+2^0}]+[\frac{2^{100}}{2^{50}+2^1}]+[\frac{2^{100}}{2^{50}+2^2}]+\cdots+[\frac{2^{100}}{2^{50}+2^{100}}]=$______ (其中 [x] 表示不超过 x 的最大整数)(注意：答案可以保留指数，比如保留 5^{20}，不用将其算出)。

★ 解析：

多个相加的时候，一般使用裂项或首尾相加的方法。

$$\frac{2^{100}}{2^{50}+2^0}+\frac{2^{100}}{2^{50}+2^{100}}$$
$$=2^{100}\times\frac{(2^{50}+2^0)+(2^{50}+2^{100})}{(2^{50}+2^0)\times(2^{50}+2^{100})}$$
$$=2^{100}\times\frac{2^{100}+2\times2^{50}+1}{2\times2^{100}+2^{100}\times2^{50}+2^{50}}$$
$$=2^{100}\times\frac{2^{100}+2\times2^{50}+1}{2^{50}\times(2\times2^{50}+2^{100}+1)}$$
$$=2^{50}。$$

显然 $\frac{2^{100}}{2^{50}+2^0}$，$\frac{2^{100}}{2^{50}+2^{100}}$ 都不是整数，所以 $[\frac{2^{100}}{2^{50}+2^0}]+[\frac{2^{100}}{2^{50}+2^{100}}]=2^{50}-1$。

同理，我们发现，任何对称的两项相加都是 $2^{50}-1$，一共有 101 项，可以配成 50 对，留下一项为 $[\frac{2^{100}}{2^{50}+2^{50}}]=[\frac{2^{100}}{2+2^{50}}]=2^{49}$。所以最后答案为 $50\times(2^{50}-1)+2^{49}=100\times2^{49}-50+2^{49}=101\times2^{49}-50$。

八年级 解方程

★ 例 1：

已知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ ($abc\neq0$) 的两个实数根为 x_1、x_2，关于 x 的方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个实数根为 x_3、x_4，若 $x_1+x_2=2(x_3+x_4)$，则 $\frac{a^2-ac+c^2}{a^2+ac+c^2}=$______。

★ 解析：

方法 1：$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\x_3+x_4=-\frac{b}{c}\end{cases}$，代入 $x_1+x_2=2(x_3+x_4) \Rightarrow \frac{c}{a}=2$。

将这个结论代入 $\frac{a^2-ac+c^2}{a^2+ac+c^2}$ 就得到答案了，$\frac{a^2-ac+c^2}{a^2+ac+c^2}=\frac{3}{7}$。

方法 2：方程 $cx^2+bx+a=0$ 可变形为 $a(\frac{1}{x})^2+b\cdot\frac{1}{x}+c=0$，

故 $\frac{1}{x_1}$、$\frac{1}{x_2}$ 是方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个实数根，

所以 $x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$。

考虑到 $x_1+x_2=2(x_3+x_4)$，

所以 $x_1+x_2=2(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}) \Rightarrow x_1x_2=2$，所以 $\frac{c}{a}=2$。

将这个结论代入 $\frac{a^2-ac+c^2}{a^2+ac+c^2}$ 就得到答案了，$\frac{a^2-ac+c^2}{a^2+ac+c^2}=\frac{3}{7}$。

★ 例 2：

已知实数 a 使得关于 x、y、z 的方程组 $\begin{cases}x+2y+3z=a\\x^2+4y^2=x+2y+z\end{cases}$ 只有唯一的一组实数解(x，y，z)，则 a=______。

★ 解析：

利用 $x+2y+3z=a \Rightarrow x+2y=a-3z$，所以 $x^2+4xy+4y^2=a^2+9z^2-6az$，从而推出 $x^2+4y^2=a^2+9z^2-6az-4xy$。

代入 $x^2+4y^2=x+2y+z$，得 $a^2+9z^2-6az-4xy=(a-3z)+z \Rightarrow 4xy=a^2+9z^2-6az-a+2z$。

利用 $\begin{cases}x+2y=a-3z\\x\cdot2y=\frac{a^2+9z^2-6az-a+2z}{2}\end{cases}$，我们推出 x、2y 是方程 $k^2-(a-3z)k+\frac{a^2+9z^2-6az-a+2z}{2}=0$ 的根。

如果这个方程有两个不同的实数根，那么(x，y，z)至少有两组解，与题意矛盾。

所以 $\triangle=(a-3z)^2-2(a^2+9z^2-6az-a+2z)=0$，整理一下得 $9z^2+(4-6a)z+a^2-2a=0$。

显然，方程 $9z^2+(4-6a)z+a^2-2a=0$ 也只能有一个解，所以 $\triangle=(4-6a)^2-36(a^2-2a)=36a^2-48a+16-36a^2+72a=0 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$。

九年级 几何问题

★ 例题：

如图 1，在正方形 ABCD 中，AD=15，AE=20，AF 平分∠BAE，则 BF=______。

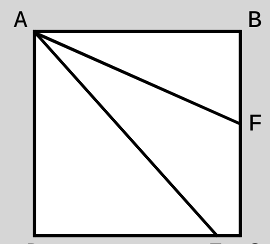

图 1

★ 解析：

$\begin{cases}AD=15\\AE=20\end{cases} \Rightarrow DE=5\sqrt{7}$，所以 $EC=15-5\sqrt{7}$。如图 2，作 FG//AB，EH⊥AB，FG 与 EH 交于点 I。假设 $\frac{CF}{BC}=x$，则 $\frac{AG}{AE}=\frac{BF}{BC}=1-x \Rightarrow AG=20(1-x)$，$\frac{GI}{AH}=\frac{EI}{EH}=\frac{CF}{BC}=x \Rightarrow GI=xAH \Rightarrow GF=GI+IF=xAH+(AB-AH)=15+5\sqrt{7}(x-1)$。

容易证明 AG=GF，所以 $20(1-x)=15+5\sqrt{7}(x-1) \Rightarrow (20+5\sqrt{7})(1-x)=15$。所以 $BF=BC(1-x)=15(1-x)=15\times\frac{15}{20+5\sqrt{7}}=5(4-\sqrt{7})$。

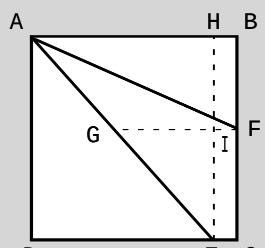

图 2