“中环杯”中小学生思维能力训练活动 思维训练营

九年级

线段的比例

◆ **例题：**

如图，在△ABC中，AB=AC，点D、E分别为AB、AC的中点。若△ABC∽△BFA，则$\frac{AB}{BC}$=________。

◆ **解析：**

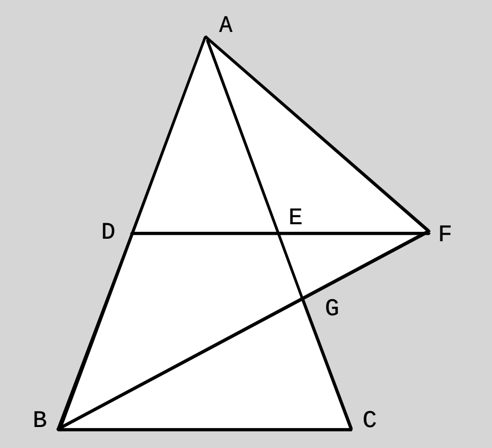
由于AB在△ABC与△BFA中都出现过了，而且△ABC∽△BFA，所以△ABC≌△BFA，所以AF=BC。其次，容易证明∠FAD=∠FDA，所以FD=FA=BC。考虑到DE=$\frac{1}{2}$BC，我们推出DE=EF=$\frac{1}{2}$BC。

设$\begin{cases}AD=AE=a\\AF=BC=b\end{cases}$，则DE=EF=$\frac{1}{2}$BC=$\frac{1}{2}$b。在△ADF中，AE为中线，代入中线长公式，我们有

$$AE=\frac{1}{2}\sqrt{2AD^2+2AF^2-DF^2},$$

所以$a=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-b^2}\Rightarrow b^2=2a^2\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

所以本题的答案为$\frac{AB}{BC}=\frac{2a}{b}=\sqrt{2}$。



六年级

猜数字

◆ **例1：**

如果一个四位数$\overline{abcd}$满足a+b+c=d，这样的四位数称为“中环数”。在1000~2016中（包含1000和2016），“中环数”有______个。

◆ **解析：**

先考虑1000~1999中的“中环数”的个数，所以1+b+c=d(d≥1)。

由于1+b+c=d⇒b+c=d-1，一旦d取定，这样的(b,c)有d组（从(0,d-1)至(d-1,0)）。

考虑到d=1、2、…、9，所以在1000~1999中的“中环数”有1+2+…+9=45（个）。

接下来考察2000~2016中的“中环数”的个数，显然只有2002、2013是“中环数”。

综上所述，本题的答案为45+2=47。

◆ **例2：**

已知n为正整数，若2^n与5^n的最高位数码相同，则n就称为“中环数”。将所有“中环数”从小到大排列，第2小的“中环数”是______。

◆ **解析：**

考虑到$2^n\times5^n=10^n$，为了使得两个数的最高位数码相同，则这个相同的数码必须为3。

容易发现$30<\frac{1000}{30}<40$，$30<\frac{1000}{31}<40$，$30<\frac{1000}{32}<40$，$30<\frac{1000}{33}<40$，$\frac{1000}{34}<30$，所以次高位数码必须在0、1、2、3中选取。

容易发现，满足要求的最小n=5，此时$2^n=32$。

为了使得第2小的n也满足上述要求，则$2^5\cdot2^k$中的2^k最好是$\overline{10XX\cdots X}$（最大不能超过$\overline{12XX\cdots X}$，毕竟30×12的前两位数码也要达到36了，不在30、31、32、33中了），这样$2^5\cdot2^k$和2^5前两位数码才能都是30、31、32或33中的一个。

考虑到$2^4=16$，$2^7=128$，$2^{10}=1024$，检验一下$2^5\cdot2^{10}=2^{15}=32768$满足要求，这个就是我们要找的第2小“中环数”。所以答案为15。

七年级

填空题

◆ **例1：**

如果$6^{14}+7$是两个质数的乘积，则较小的那个质数为________。

◆ **解析：**

令6=x，则$6^{14}+7=x^{14}+x+1$。

考虑到$x^{14}+x+1=(x^{14}+x^{13}+\cdots+x+1)-(x^{13}+x^{12}+\cdots+x^2)=\frac{x^{15}-1}{x-1}-(x^2+x+1)(x^{11}+x^8+x^5+x^2)=\frac{(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{x-1}-(x^2+x+1)(x^{11}+x^8+x^5+x^2)=(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)-(x^2+x+1)(x^{11}+x^8+x^5+x^2)=(x^2+x+1)(\cdots)$

所以，$6^2+6+1=43$肯定是那个较小质数。

◆ **例2：**

在b进制中，存在一个可以表示为$(\overline{xyxy})_b$的完全立方数，则b的最小值为________。

◆ **解析：**

根据题意，$(\overline{xyxy})_b=x\cdot b^3+y\cdot b^2+x\cdot b+y=xb(b^2+1)+y(b^2+1)=(b^2+1)(xb+y)$，这是一个完全立方数。

考虑到$xb+y<b\cdot b+b=b^2+b<(b^2+1)^2$，如果$b^2+1$的素因数分解中所有素因数的指数都是1，那么(xb+y)需要大于等于$(b^2+1)^2$，显然不是xb+y所能够达到的。

当b=2、3、4、5、6时，b^2+1分别为5、10、17、26、37，此时它的素因数分解中所有素因数的指数都是1，不可能满足题目的要求。

当b=7时，$b^2+1=2\times5^2$，此时可以取$\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$，使得$xb+y=2\times7+6=2^2\times5$，使得$(b^2+1)(xb+y)=(2\times5)^3$，满足题意。

所以答案为7。

解方程

八年级

◆ **例题：**

求方程

$$x\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+\cdots}}}=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}}$$

的解。

◆ **解析：**

令$\begin{cases}A=x\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+\cdots}}}\\B=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}}\end{cases}$，

则$\begin{cases}A=x\sqrt{1+A}\\B=\sqrt{x+B}\end{cases}$。

利用$A=x\sqrt{1+A}\Rightarrow A^2-x^2A-x^2=0\Rightarrow A=\frac{x^2\pm\sqrt{x^4+4x^2}}{2}$。

考虑到$x\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+\cdots}}}=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}}}{\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+\cdots}}}}\geqslant0$，

所以A≥0，只能取$A=\frac{x^2+\sqrt{x^4+4x^2}}{2}=\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}$。

利用$B=\sqrt{x+B}\Rightarrow B^2-B-x=0\Rightarrow B=\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$。

（1）如果x=0，

则取$B=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}=0$，

此时A=0，满足题意；

（2）如果x≠0，则$\begin{cases}B\geqslant0\\x>0\end{cases}$，

所以只能取$B=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$。

至此，我们得到方程

$$\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\Rightarrow x^2+x\sqrt{x^2+4}=1+\sqrt{1+4x}。$$

接下来解这个方程，我们有

$x^2+x\sqrt{x^2+4}=1+\sqrt{1+4x}\Rightarrow x^2-1=\sqrt{1+4x}-x\sqrt{x^2+4}\Rightarrow(x^2-1)^2=(\sqrt{1+4x}-x\sqrt{x^2+4})^2\Rightarrow x^4-2x^2+1=1+4x+x^4+4x^2-2x\sqrt{1+4x}\sqrt{x^2+4}\Rightarrow x\sqrt{1+4x}\sqrt{x^2+4}=6x^2+4x\Rightarrow\sqrt{x^2+4}=3x+2\Rightarrow4x^3+17x^2+4=9x^2+12x+4\Rightarrow4x^3+8x^2-12x=0\Rightarrow4x(x-1)(x+3)=0$

考虑到x>0，只能取x=1。